

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB
MATEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER, BIND XXV, NR. 7

LE SPECTRE DES NAINES BLANCHES ET LEUR DÉBIT D'ÉNERGIE

PAR

EVRY SCHATZMAN



KØBENHAVN

I KOMMISSION HOS EJNAR MUNKSGAARD

1950

DET KGL. DANSKE VIDEENSKABERNES SÆLSKAB
MATHEMATISK-FYSISKE MEDDELELSE, 1900, XXV, no. 7

LE SPECTRE
DES RAIES BLANCHES ET
LEUR DÉBIT D'ÉNERGIE

PAR

FRY SCHATZMAN



KÖBENHAVN
Printed in Denmark
Bianco Lunos Bogtrykkeri

L'interprétation du spectre des naines blanches est profondément liée à la compréhension de leur structure interne. Le triage des éléments dans un champ de pesanteur, phénomène particulièrement important dans les naines blanches, détermine presque totalement à lui seul leur structure et l'aspect de leur spectre. On étudie donc pour commencer le triage des éléments (chapitre I). On montre comment se distribuent les éléments dans un champ de pesanteur. L'évaluation de la hauteur de mélange dans des cas variés montre que cette grandeur est peu sensible à l'état de dégénérescence du gaz d'électrons. La hauteur de mélange est toujours très petite dans les naines blanches. On voit aussi que les éléments lourds doivent avoir en général dans les régions extérieures des naines blanches une concentration extraordinairement faible, ce qui explique l'absence de raies métalliques dans le spectre.

Les densités relativement élevées qui règnent dans l'atmosphère des naines blanches exigent une étude de l'ionisation de pression dans l'hydrogène (chapitre II). On montre en particulier que l'effet Stark moléculaire semble mieux décrit aux fortes densités par les formules de RUSSELL et STEWART que par celles de HOLTSMARK.

On a calculé un modèle d'atmosphère pour deux étoiles correspondant approximativement à 40 Eridani B et Van Maanen 2 (Chapitre III). On a supposé une atmosphère faite d'hydrogène pur, ainsi que l'étude du chapitre I l'a suggéré. Le calcul de l'élargissement des raies par effet Stark moléculaire montre une importante déformation du contour du fond continu sous l'influence de la pression.

Les résultats précédents permettent d'étudier la relation entre la température de couleur et la température effective dans les

naines blanches (chapitre IV). On trouve que pour une même température de couleur, la température effective est beaucoup plus élevée dans les naines blanches que dans les étoiles de la série principale. Ce fait joint aux résultats de la théorie du débit d'énergie aux grandes densités, indique pour les naines blanches des rayons plus petits et entraîne de très faibles teneurs en hydrogène.

Ce résultat est confirmé par la théorie élémentaire du débit d'énergie (Chapitre V). On peut montrer que la réaction proton — proton dans l'enveloppe d'hydrogène explique le débit d'énergie des naines blanches. Cette réaction pouvant être permise sans catastrophe astrophysique, on réconcilie ainsi les données de l'astrophysique avec la théorie des réactions nucléaires. Les réactions du cycle de Bethe semblent, en général, ne jouer qu'un rôle secondaire (un pour cent du débit d'énergie total dans 40 Eridani B).

La question de l'évolution des naines blanches reste une question ouverte que les calculs précédents ne résolvent pas. De même, la structure de Van Maanen 2, seule naine blanche présentant avec certitude des raies métalliques, présente des difficultés, car elle doit être compatible à la fois avec la théorie du débit d'énergie et la théorie du triage des éléments.

Je tiens à adresser mes remerciements les plus sincères à Monsieur le Professeur Strømgren pour son accueil si chaleureux à Copenhague, et pour les nombreuses discussions que j'ai pu avoir avec lui. Je remercie également M. Rudkjøbing pour les conversations que j'ai eues avec lui.

I. Le triage des éléments.

1. Aspect général du problème. Le problème de l'équilibre statistique dans un champ de gravitation d'un mélange de particules d'espèces différentes est un problème déjà ancien auquel des contributions très nombreuses ont été apportées.

Mentionnons tout d'abord les problèmes relatifs aux mélanges isothermes, nous réservant d'aborder plus loin la question des gaz non uniformes et des cas de dégénérescence.

Pour des éléments soumis au seul champ de pesanteur, à

l'exclusion de tout autre champ de force (électrique ou magnétique), on a simplement, en appliquant la loi de distribution de Boltzmann :

$$(1.1) \quad \varrho = \varrho_0 e^{-m(V-V_0)/kT}$$

qui est la loi de distribution des densités connue sous le nom de loi de Dalton.

Dans le cas d'un équilibre de dissociation produisant ou non des particules chargées, l'équilibre thermodynamique n'est pas modifié par la présence ou l'absence d'un champ. Ceci a été démontré dans le cas d'un champ de pesanteur par GIBBS (17), dans le cas d'un champ de forces électrostatiques par MILNE (24). Les conséquences de la présence d'un champ de gravitation sur la séparation des charges électriques (les électrons étant plus légers que les protons) ont été données pour la première fois par PANNEKOEK (27), qui a évalué la charge d'origine thermique de la matière. On savait déjà par ce résultat que la charge électrique de la matière était très faible et que le champ électrique présent était assez fort pour empêcher toute séparation des charges. L'analyse de ROSSELAND (29) montre que la séparation des charges dans une atmosphère isotherme ne commence que lorsque le terme

$$(1.2) \quad \frac{4 \pi \varepsilon^2 p_e}{m_e^2 g^2}$$

est petit comparé à l'unité. Dans le cas du soleil, le produit $4 \pi \varepsilon^2 / m_e^2 g^2$ vaut $4,85 \cdot 10^{27}$. Dans le cas des naines blanches connues, g peut être 10^6 fois plus fort, et $4,85 \cdot 10^{15}$ peut être considéré comme une limite inférieure. p_e doit donc être inférieur à 10^{-16} dynes/cm² ou, pour une température moyenne de $2 \cdot 10^4$ degrés de l'atmosphère des naines blanches, le nombre d'électrons par centimètre cube doit être inférieur à $10^{-4,4}$, c-à-d. bien inférieur à la densité de l'espace interstellaire. Par une autre voie que celle de Pannekoek, Rosseland a donc montré la justesse de l'hypothèse de neutralité électrique de la matière stellaire.

Dans le cas des champs de pesanteur intenses, la séparation des éléments peut être assez considérable pour qu'on puisse

définir une hauteur de mélange de deux éléments. Ceci a été fait par l'auteur (34) dans le cas où le gaz d'électrons est dégénéré et étendu (35) au cas où le gaz d'électrons étant parfait, l'ionisation est partielle. La charge électrique lorsque le gaz d'électrons est dégénéré a été calculée également (37). Le problème du gaz isotherme peut être abordé d'une toute autre manière à partir de l'étude des gaz non-uniformes (12). Le phénomène de diffusion de pression, dû à l'existence d'un gradient de pression partielle d'un gaz mêlé à un autre est connu depuis longtemps. Le langage de la théorie des gaz non-uniformes nous amène au cas des gaz non-isothermes, qui est le cas réel des étoiles. Un bref aperçu est donné par Eddington dans I.C.S.(14), qui renvoie pour la diffusion thermique à un travail de CHAPMAN (10). La diffusion thermique qui est de très faible importance devant d'autres phénomènes est traitée par Chapman dans cet article déjà ancien sans tenir compte des phénomènes d'ionisation. EDDINGTON (l. c.) évalue qualitativement l'influence du modèle atomique utilisé, et conclut, en accord avec une confirmation personnelle de Chapman, que la diffusion thermique joue sans doute dans le même sens que la diffusion de pression. BIERMANN (3) étudie le problème de la diffusion et de l'équilibre statistique en donnant une bibliographie du sujet.

Tous ces travaux sur les gaz non-uniformes sont faits en supposant que les atomes ne transportent avec eux aucune énergie autre que cinétique de translation ou de rotation (11) et par conséquent ne tiennent pas compte de l'énergie d'ionisation. L'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local permet d'adapter les équations valables pour une atmosphère isotherme à une atmosphère à température non-uniforme, et, par comparaison avec les formules de diffusion, de montrer l'existence d'une diffusion thermique due à l'ionisation.

D'autre part, suivant que le gaz de noyaux se trouve plongé dans un gaz d'électrons dégénéré ou parfait, le triage est déterminé, dans le premier cas par la quantité

$$(1.3) \quad \frac{A_i}{Z_i}$$

dans le second par la quantité:

$$\frac{A_i - m_e}{Z_i + 1}$$

Lorsque le gaz d'électrons est dégénéré, tous les éléments se comportent de la même façon devant l'hydrogène ($A_i/Z_i \cong 2$), alors que dans le second cas, tous les éléments subissent en plus les uns par rapport aux autres un triage important.

Lorsque les phénomènes de dégénérescence apparaissent également au sein du gaz de noyaux, particulièrement avec les dégénérescences de Bose-Einstein, différents phénomènes assez curieux apparaissent. Tous ces résultats ont reçu un commencement d'application à la théorie des naines blanches (34).

A. Les gaz non-dégénérés.

2. Méthode statistique. Rappelons brièvement comment on traite le problème de l'équilibre de dissociation d'un mélange de particules d'espèces différentes. Cette méthode est inspirée de celle employée par CHANDRASEKHAR (6) à la suite de MILNE (25).

Etant donnés j éléments de charge Z_i et possédant différents degrés d'ionisation, on peut représenter les réactions d'équilibre par :

$$(2.1) \quad A_i^n + ne - \sum_n \chi_i^n \rightleftharpoons A_i^0,$$

dans lequel A est l'atome d'espèce i ionisé n fois. χ_i^n est l'énergie pour ioniser le n^e électron et $\sum_n \chi_i^n$ est l'énergie nécessaire pour ioniser n fois l'atome.

Nous appelons p_{is}^n le nombre d'atomes d'espèce i , n fois ionisés, d'énergie $E_s^{in} + \sum_n \chi_i^n$ et x_{is}^n le nombre d'états possibles d'énergie $E_s^{in} + \sum_n \chi_i^n$. r_s , E_s , x_s représentent des quantités analogues pour les électrons. Pour trouver l'état le plus probable, nous astreignons les quantités p_{is}^n et r_s aux conditions suivantes :

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{ns} p_{is}^n = p_i \\ \sum_{ns} (Z_i - n) p_{is}^n + r_s = r \\ \sum p_{is}^n (E_s^{in} + \sum_n \chi_i^n) + E_s r_s = E \end{array} \right.$$

conditions relatives au nombre de particules et à l'énergie. En associant ces conditions au nombre de complexions (qu'il est inutile d'écrire) et en employant la méthode des multiplicateurs de Lagrange en multipliant les équations de condition par $\alpha_i \beta \vartheta$, on obtient:

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{is}^n = x_{is}^n e^{-\alpha_i(Z_i-n)\beta - \vartheta(E_s^{in} + \sum \chi_i^n)} \\ r_s = x_s e^{-\beta - \vartheta E_s}. \end{array} \right.$$

Par intégration dans l'espace des moments, et en se rappelant que E_s^{in} contient l'énergie cinétique et l'énergie potentielle:

$$(2.4) \quad E_s^{in} = \frac{p_s^2}{2m_i} + \varphi m_i - ne\psi,$$

on obtient:

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_i^n = g_i^n \frac{(2\pi m_i^n kT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} e^{-\alpha_i - (Z_i-n)\beta - \vartheta(\varphi m_i - ne\psi + \sum \chi_i^n)} \\ r = 2 \frac{(2\pi m_e kT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} e^{-\beta - \vartheta(\varphi m + e\psi)}. \end{array} \right.$$

On retrouve ici le résultat déjà obtenu par GIBBS et MILNE c-à-d., l'indépendance de l'équation d'équilibre par rapport aux champs électriques et de pesanteur:

$$(2.6) \quad \frac{p_i^n r}{p_i^{n-1}} = \frac{2 g_i^n (2\pi m_e kT)^{\frac{3}{2}}}{g_i^{n-1} h^3} e^{-\vartheta \chi_i^n}.$$

Comme nous sommes dans le cas d'un gaz isotherme, les α_i et β sont des constantes, et l'équation d'équilibre hydrostatique:

$$(2.7) \quad \frac{dP}{dz} = -F\varrho$$

est une conséquence des équations écrites ci-dessus.

3. Le triage des éléments. La détermination du potentiel électrique ψ pourrait se faire en utilisant la relation de Poisson. On obtient alors les résultats bien connus relatifs à la quasi-

neutralité électrique du milieu. Il est donc plus simple de partir de cette relation pour définir ψ :

$$(3.1) \quad \sum_{in} n p_i^n = r,$$

ou, après élimination de $T^{\frac{3}{2}}$,

$$(3.2) \quad \sum_{in} n \frac{g_i^n}{2} \left(\frac{m_i^n}{m_e} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\alpha_i - (Z_i - n - 1)\beta - \gamma [q(m_i^n - m_e) - (n+1)e\psi] - \gamma \sum \chi_i^n} = 1,$$

équation de la forme:

$$(3.3) \quad \sum_{in} n a_{in} u^{A_i^n} v^{n+1} = 1$$

avec

$$(3.4) \quad \begin{cases} u = e^{-\gamma q H} & H A_i^n = m_i - (n+1) m_e \\ v = e^{\gamma e \psi}, \end{cases}$$

m_i étant la masse de l'atome non ionisé.

Il est aisé de démontrer, comme nous l'avons déjà fait (34, paragraphe 14), que les maxima de concentration des différents éléments et de leurs ions se succèdent de bas en haut d'un récipient vertical dans l'ordre des $A_i^n / (n+1)$ décroissants, les atomes les plus ionisés ou les plus légers se trouvant en haut. Remarquons toutefois que la démonstration concerne une concentration particulière:

$$(3.5) \quad c_{in} = \frac{P_i^n}{r}$$

qui est le nombre d'atomes i ionisés n fois au nombre total de charges positives (ou négatives) libres, et non pas la masse de particules p_i^n à la masse totale. Le résultat subsiste cependant avec cette définition de la concentration.

Dans le cas d'un mélange de deux éléments, il est possible de pousser les conclusions beaucoup plus loin. Nous allons donner ici une première définition de la hauteur de mélange, identique à celle déjà utilisée (34). Nous appelons hauteur de mélange l'intervalle dans lequel les éléments 1 et 2 étant mélangés, le produit des concentration en poids $c_1 \cdot c_2$ reste supérieur

à une quantité donnée. On est assuré de définir ainsi une région où l'on trouve simultanément les concentrations les plus élevées des deux éléments. Si l'on suppose que pour une densité et une température données, l'élément 1 est essentiellement ionisé n_1 fois et l'élément 2, n_2 fois, l'équation de neutralité électrique se réduit approximativement à :

$$(3.6) \quad n_1 p_1^n + n_2 p_2^n = r.$$

La concentration en poids est alors approximativement :

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{m_1 p_1^{n_1}}{m_1 p_1^{n_1} + m_2 p_2^{n_2}} \\ c_2 = \frac{m_2 p_2^{n_2}}{m_1 p_1^{n_1} + m_2 p_2^{n_2}}. \end{array} \right.$$

Le produit $c_1 c_2$ est maximum pour $\frac{m_2 p_2^{n_2}}{m_1 p_1^{n_1}} = 1$ et prend la moitié de la valeur au maximum pour $\frac{m_2 p_2^{n_2}}{m_1 p_1^{n_1}} = 3 \pm \sqrt{8}$. Le système des équations (2.5) nous permet d'éliminer la variation de potentiel électrique ψ et on obtient ainsi sous une forme symétrique :

$$(3.8) \quad h = \frac{\Re T}{g} \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{n_1+1} + \frac{1}{n_2+1} \right) \log (17 + 12\sqrt{2}) + \left(\frac{1}{n_1+1} - \frac{1}{n_2+1} \right) \log \left[\frac{\frac{A_1 \sqrt{3+\sqrt{8}} + \frac{A_2 \sqrt{3-\sqrt{8}}}{n_2}}{n_1}}{\frac{\frac{A_1 \sqrt{3-\sqrt{8}} + \frac{A_2 \sqrt{3+\sqrt{8}}}{n_2}}{n_1}}{n_1}} \right]}{\left| \frac{A_1}{n_1+1} - \frac{A_2}{n_2+1} \right|}.$$

On voit ici que la grandeur caractéristique pour le phénomène de triage est la quantité $A_1/n_1 + 1$, et que, si l'on trouvait deux éléments portant la même masse par particule libre, ils ne seraient soumis à aucun triage.

Lorsque l'élément 1 est l'hydrogène et l'élément 2 un métal, et que l'on se trouve dans une région de forte ionisation, on obtient approximativement, en négligeant $1/n_2 + 1$ devant $1/2$:

$$(3.9) \quad h = \frac{\Re T 1}{g} \frac{1}{2} \frac{\log \frac{(17 + 12\sqrt{2})^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{A_2}{n_2}}}{\frac{A_2}{n_2 + 1}}}{1}$$

Nous avons supposé l'ionisation presque totale, donc $A_2/n_2 \simeq 2$ et

$$(3.10) \quad h \simeq 6,4 \cdot 10^7 \frac{T}{g}$$

Lorsque l'ionisation est presque totale, tous les éléments se comportent de la même façon devant l'hydrogène.

Nous préciserons plus loin (§ 9) ces résultats.

4. L'atmosphère non isotherme. Dans le cas où l'atmosphère n'est pas isotherme, l'énergie $m_i \varphi - n_i e \psi$ a une valeur purement locale, si bien qu'il faut remplacer l'expression $\frac{m_i \varphi - n_i e \psi}{kT}$ par

$$(4.1) \quad \int \frac{m_i d\varphi - n e d\psi}{kT} = \int \frac{m_i \varphi' - n e \psi'}{kT} dz.$$

De plus, les grandeurs α_i et β , qui étaient des constantes dans le cas de l'atmosphère isotherme, ne le sont plus maintenant.

Le dénombrement des équations et des constantes nous permet de choisir une forme pour α_i et β ; nous avons les équations:

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum n_i p_i = r \\ \frac{dP}{dr} = -f\varrho \\ \sum_n \int_{\vartheta}^n p_i^n dv = P_i. \end{array} \right.$$

Nous avons supposé ici que la température est une fonction connue de la cote, ce qui revient au même que de se donner une équation de transfert. On a donc $j + 2$ relations pour déterminer les $j + 2$ quantités $\alpha_i, \beta, \int \frac{\psi' dz}{T}$. La première est une relation algébrique, la deuxième une équation différentielle et les j autres des relations numériques. Nous voyons que nous pouvons déter-

miner au plus par ce système $j + 1$ constantes, et 2 fonctions, à condition que les quantités $\alpha_i \beta$ dépendent d'une fonction dépendant d'une constante. Nous prendrons, puisque cette fonction est arbitraire :

$$(4.3) \quad e^{-\alpha_i} = A_i u \quad e^{-\beta} = B u.$$

Déterminons dans ces conditions la fonction u . L'équation d'équilibre hydrostatique, compte tenu de l'expression (2.5) des p_i^n et de r , donne :

$$(4.4) \quad \frac{T'}{T} kT \left[\sum p_i^n \frac{\sum \chi_i^n}{kT} \frac{5}{2} (r + \sum p_i^n) \right] + kT \frac{u'}{u} [r + \sum (Z_i - n) p_i^n] + kT \frac{u'}{u} \sum p_i^n = 0.$$

Cette expression est importante, car, lorsque l'on suppose $\chi_i^n = 0$, c-à-d. la matière totalement ionisée, cette équation se simplifie et donne :

$$(4.5) \quad \frac{u'}{u} = -\frac{5}{2} \frac{T'}{T}$$

et l'on obtient grâce à (2.5) pour tous les p_i et pour r une loi en :

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_i \sim T^{-1} e^{-\int \frac{m_i \varphi' - Ze \psi'}{kT} dz} \\ r \sim T^{-1} e^{-\int \frac{m_e \varphi' + e \psi'}{kT} dz} \end{array} \right.,$$

c-à-d. un résultat parfaitement identique à celui que donnent les équations de la diffusion lorsque l'on néglige la diffusion thermique.

Dans le cas plus général où l'ionisation joue encore un rôle, on a :

$$(4.7) \quad \frac{u'}{u} = -\frac{T'}{T} \frac{\sum p_i^n \frac{\sum \chi_i^n}{kT} + (\sum p_i^n + r)}{\sum p_i^n (Z_i - n + 1) + r}.$$

Pour déterminer la fonction ψ , il est nécessaire d'intégrer le système de deux équations (4.7) et (3.1), cette dernière étant l'équation de neutralité électrique. Evidemment, dans le cas général où (3.1) est une expression polynôme en u et $\exp \int \frac{e \psi' dz}{kT}$, l'intégration de ce système ne pourra pas se faire sans difficultés.

5. La diffusion d'ionisation. Considérons l'équation:

$$(5.1) \quad \frac{dP_i}{dz} = f_i \varrho_i$$

qui exprime l'équilibre des pressions partielles et qui est la seule équation à satisfaire dans le cas de l'ionisation totale.

Lorsque l'ionisation n'est pas totale, il faut ajouter un terme supplémentaire qui tienne compte de l'existence de collisions avec recombinaison et ionisation. On a immédiatement, d'après (2.5),

$$(5.2) \quad \frac{dP_i}{dz} = P_i \left[\frac{5}{2} \frac{T'}{T} + (Z_i - n + 1) \frac{u'}{u} - \frac{\varphi' m_i - ne \psi'}{kT} + \frac{1}{kT} \frac{T'}{T} \sum \chi_i^n \right].$$

Nous avons donc un terme supplémentaire

$$(5.3) \quad \frac{T'}{T} p_i^n kT \left[\frac{5}{2} + \frac{\sum \chi_i^n}{kT} - (Z_i - n + 1) \frac{\sum p_i^n \frac{\sum \chi_i^n}{kT} + \frac{5}{2} (\sum p_i^n + r)}{\sum p_i^n (Z_i - n + r) + r} \right]$$

qui bien entendu se réduit à zéro quand $n = Z_i$, $\chi_i^n = 0$. Nous pouvons l'évaluer numériquement de la façon approximative suivante: si l'on prend $n_i = Z_i$, ce qui revient à considérer le reste atomique, on a:

$$(5.4) \quad \frac{T'}{T} p_i^n kT \left[\frac{5}{2} + \frac{\sum \chi_i^n}{kT} - \frac{5}{2} - \frac{\sum p_i^n \frac{\chi_i^n}{kT}}{\sum p_i^n + r} \right]$$

ou:

$$(5.5) \quad \frac{T'}{T} p_i^n \left[\sum \chi_i^n - \frac{\sum p_i^n \chi_i^n}{\sum p_i^n + r} \right].$$

Nous arrivons donc à l'équation:

$$(5.6) \quad \frac{\partial P_i}{\partial z} - f_i \varrho_i - \delta_i \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

avec:

$$(5.7) \quad \delta_i = p_i^n \left[V_i^n - \frac{\sum p_i^n V_i^n}{\sum p_i^n + r} \right].$$

Dans l'équation de diffusion (M.T. 14.1.1) ce coefficient figurerait avec le coefficient $1/P$:

$$(5.8) \quad -\frac{1}{P} \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} p_i^n \left[V_i^n - \frac{\sum p_i^n V_i^n}{\sum p_i^n + r} \right].$$

Comparons le terme

$$(5.9) \quad -\frac{p_i^n}{P} \left[V_i^n - \frac{\sum p_i^n V_i^n}{\sum p_i^n + r} \right]$$

au coefficient k_T (M.T. 14.1.1). Si l'on suppose un élément, en équilibre avec ses produits de dissociation, l'expression (5.9) pour l'un des produits de dissociation s'écrit :

$$(5.10) \quad -\frac{p_1}{P} \left[V - \frac{p_1 V}{p_1 + p_2 + p_3} \right]$$

ou :

$$(5.11) \quad -\frac{p_1 V}{P} \frac{p_2 + p_3}{p_1 + p_2 + p_3}$$

qui est de l'ordre de grandeur de $p_1 V/P$. Si l'on prend P égal à la pression atmosphérique, $p_1 kT = \frac{1}{3} P$, le terme (5.9) est de l'ordre de grandeur de

$$(5.12) \quad \frac{1}{3} \frac{V}{kT}.$$

Pour un corps dissocié à moitié, ce terme est de l'ordre de quelques unités, et par conséquent considérablement plus grand que le coefficient de diffusion thermique k_T . A l'équilibre, on a évidemment un équilibre thermodynamique local, et la mesure de la concentration d'un point à un autre ne serait qu'une mesure de l'énergie de réaction. Cette diffusion ne se manifeste que durant le passage à l'équilibre.

6. Hydrogène presque pur. L'hypothèse que les naines blanches ont une atmosphère d'hydrogène presque pur, entraîne la nécessité de traiter le cas de l'hydrogène, et de déterminer le potentiel ψ et la fonction u , afin de pouvoir les reporter dans les expressions p_i^n du nombre des autres éléments, supposé petit comparé à l'hydrogène. On a alors :

$$(6.1) \quad \frac{u'}{u} = -\frac{T' p_1 \frac{\chi}{kT} + \frac{5}{2} (p_0 + p_1 + r)}{T \cdot 2 p_0 + p_1 + r}.$$

A l'intérieur de la région d'hydrogène, χ/kT est très petit, p_0 est très petit, et par conséquent:

$$6.2 \quad u = \text{cte} \left(\frac{1}{T} \right)^{\frac{5}{2}},$$

d'où les nombres des différentes particules:

$$(6.3) \quad p_0 = A_0 T^{-\frac{5}{2}} e^{-\int \vartheta \varphi' m_i dz}.$$

$$(6.4) \quad p_1 = A_1 T^{-1} e^{-\int \vartheta (\varphi' m_i^{\frac{1}{2}} - e \psi') dz - \frac{\chi}{kT}}.$$

$$(6.5) \quad r = B T^{-1} e^{-\int \vartheta (\varphi' m_i - e \psi') dz}.$$

La condition de neutralité électrique nous détermine ψ' :

$$(6.6) \quad A_1 e^{-\int \vartheta (\varphi' m_i - e \psi') dz} = B e^{-\int \vartheta (\varphi' m_e + e \psi') dz}$$

ou:

$$(6.7) \quad \frac{A_1}{B} e^{-\int \vartheta \varphi' (m_i^{\frac{1}{2}} - m_e) dz} = e^{-\int 2 \vartheta e \psi' dz}$$

ou, par dérivation logarithmique:

$$\varphi' (m_i^{\frac{1}{2}} - m_e) = 2 e \psi'$$

$$(6.8) \quad \psi' = \frac{m_i^{\frac{1}{2}} - m_e}{2 e} \varphi'.$$

On en déduit la concentration d'un élément quelconque de charge Z , ionisé n fois:

$$(6.9) \quad p_i^n = A_i T^{\frac{3}{2}} T^{-\frac{5}{2}(Z-n+1)} e^{-\int \vartheta \left(m_i - \frac{nm_i}{2} \right) d\varphi} e^{-\chi/kT}.$$

Dans cette région, on a (34):

$$(6.10) \quad T = -\frac{\varphi' \frac{m_1}{2}}{\frac{17}{4} k} z$$

en prenant la surface de l'étoile pour origine, ou:

$$(6.11) \quad \frac{m_i}{2} \frac{1}{kT} = -\frac{17}{4} \frac{1}{\varphi' z}.$$

L'intégrale en exponentielle vaut:

$$(6.12) \quad \int \vartheta \left(m_i - \frac{nm_1}{2} \right) \varphi' dz = - \left(2 \frac{m_i}{m_1} - n \right) \frac{17}{4} \log |z|$$

et puisque T est proportionnel à z :

$$(6.13) \quad p_i^n \sim T^{\frac{3}{2} - \frac{5}{2}(Z-n+1) + \frac{17}{4} \left(2 \frac{A_i}{A_1} - n \right)} e^{-\sum_n \frac{\chi_i^n}{kT}}.$$

Nous avons donc un terme exponentiel qui contient l'énergie d'ionisation et un terme en T^α . Si nous supposons pour commencer que T est assez élevé pour que l'on puisse négliger les variations de $e^{-\chi/kT}$, nous n'avons à tenir compte que du terme en T^α . On a:

$$\alpha = -1 - \frac{7}{4}n - \frac{5}{2}Z + \frac{17}{2} \frac{A_i}{A_1}.$$

Ici, $A_1 = 1$ (hydrogène). On a donc:

$$\alpha = -1 - \frac{7}{4}n - \frac{5}{2}Z + \frac{17}{2} A_i.$$

Nous donnons dans le tableau I les valeurs de α pour quelques éléments.

Tableau I.

Élément	A_i	n				
		0	2	4	6	8
Hélium	4	28	24,5
Carbone	12	86	82,5	79	75,5	..
Azote	14	100,5	97	93,5	90	..
Oxygène	16	115	111,5	108	104,5	101
Sodium	23	167	163,5	160	156,5	153
Magnésium	24	173	169,5	166	162,5	159
Silicium	28	202	198,5	195	191,5	188
Potassium	39	283	279,5	276	272,5	269
Calcium	40	289	285,5	282	278,5	275
Fer.	56	376	372,5	369	365,5	362

On ne peut manquer d'être frappé par les très grandes valeurs de cet exposant, et l'on conclut immédiatement que si aucun autre phénomène n'intervient, la concentration en éléments lourds à la surface des naines blanches doit être imperceptible.

En fait, nous savons qu'il existe dans le soleil une couche convective près de la surface. Son existence a été démontrée par UNSÖLD (49). Elle a été étudiée en particulier par BIERMANN (4), RUDKJØBING (30, 32). Il est possible que cette couche atteigne des profondeurs relativement grandes. Si une telle couche existe dans les naines blanches, elle peut être susceptible d'aller chercher les éléments lourds à une grande profondeur pour les ramener à la surface de l'étoile où ils peuvent apparaître dans le spectre. Cela semble être le cas de Van Maanen 2, comme une étude à paraître prochainement le montrera.

7. Couche de mélange. Nous avons introduit pour les couches profondes un élément moyen (34). Au voisinage de la couche de mélange, il est nécessaire d'introduire une autre approximation.

Supposant toujours que les variations dues aux termes exponentiels $\exp(-\chi/kT)$ sont faibles en raison de la haute température de la couche de mélange, nous posons:

$$(7.1) \quad u = e^{-\int \vartheta \varphi' H dz}$$

$$(7.2) \quad v = e^{\int \vartheta e \psi' dz}$$

et l'équation de neutralité électrique prend la forme:

$$(7.3) \quad \sum \frac{a_i}{b} Z_i u^{A_i - A_e} v^{Z_i + 1} = 1.$$

Nous déterminons les constantes a_i , b par un choix convenable de l'origine des coordonnées. A l'origine, nous avons $u = v = 1$. Si l'on suppose que l'hydrogène et les autres éléments pris ensemble ont une concentration respectivement égale à $1/2$ en ce point, on a à un facteur près, le même pour a_i et b :

$$(7.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_i = \frac{1}{2} \frac{c_i}{m_i} \\ a_n = \frac{1}{2} \frac{1}{m_n} \\ \text{(hydrogène)} \end{array} \right.$$

et on en déduit b :

$$(7.5) \quad b = \frac{1}{2} \frac{Z_n}{m_n} + \frac{1}{2} \sum \frac{Z_i c_i}{m_i}.$$

L'équation de neutralité électrique s'écrit alors:

$$(7.6) \quad \frac{\sum \frac{c_i}{A_i} Z_i u^{A_i} v^{Z_i+1} + \frac{1}{A_n} u^{A_n} v^{Z_n+1}}{\sum c_i \frac{Z_i}{A_i} + \frac{Z_n}{A_n}} = 1.$$

Nous allons supposer maintenant que pour les éléments lourds

$$\frac{A_i}{Z_i+1} - \frac{A_j}{Z_j+1}$$

est si petit que nous pouvons le négliger. En prenant comme nouvelle variable $u^{A_i} v^{Z_i} = t$ on obtient ainsi, avec $Z_i/A_i = 1/2$ et en confondant Z_i et $Z_i + 1$

$$\frac{1}{2} \sum c_i t^{Z_i/Z_i} + u (t^{1/Z_i} u^{-2})^2 = \frac{3}{2}$$

ou:

$$(7.7) \quad \frac{1}{2} \sum c_i t^{Z_i/Z_i} + u^{-3} t^{2/Z_i} = \frac{3}{2},$$

d'où u :

$$(7.8) \quad u^3 = \frac{t^{2/Z_i}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sum c_i t^{Z_i/Z_i}}.$$

On en déduit la concentration en hydrogène x_H représentée paramétriquement en fonction de t par (7, 8) et

$$(7.9) \quad x_H = \frac{u^{-1} t^{1/Z_1}}{u^{-1} t^{1/Z_1} + \sum c_i t^{Z_i/Z_1}}$$

On a de plus:

$$(7.10) \quad - \int_0^z \vartheta \varphi' H dz = \log_e u$$

qui donne la variation de u avec la cote.

La solution ainsi trouvée se raccorde aisément du côté de l'hydrogène à la solution (6.13) et du côté des éléments lourds à la solution approchée de non triage.

Nous avons calculé une table des variations de x_H avec la hauteur en admettant pour les éléments lourds un mélange de Russell simplifié, dont la composition est donnée dans le tableau II.

Tableau II.

Élément	Concentration
O.....	0,5
Mg.....	0,25
Si.....	0,0625
Ca.....	0,0625
Fe.....	0,125

On obtient ainsi les résultats donnés dans le tableau III. Les hauteurs ont été calculées pour un gaz isotherme à $T = 10^7$ degrés et dans un champ de pesanteur $g = 10^9$ c. g. s. On remarquera combien ces hauteurs sont faibles dans un si grand champ de pesanteur.

On remarquera que nous n'avons pas introduit d'hélium. La raison essentielle est que pour l'hélium, l'hypothèse $A_i/Z_i + 1 = Ct$ n'est plus valable, ou n'est plus en tout cas qu'une grossière approximation. L'introduction d'hélium compliquerait considérablement la solution, sauf si toutefois on supposait l'étoile composée d'hydrogène et d'hélium presque exclusivement.

On trouvera fig. 1, p. 20, la courbe représentative de x_H en fonction de $\log u$. Ce résultat peut être utilisé pour le calcul de la distribution de la température et du débit d'énergie, car la fonction $x(t)$ ainsi obtenue est indépendante de la température

Tableau III.

t^{1/Z_1}	$\sum c_i t^{Z_i/Z_1}$	$-\log_{10} u$	x_H	Z_{km} ($T=10^{70}$ $g=10^9$ cgs)	$\frac{x_0}{1-x_H}$	$\frac{x_{Mg}}{1-x_H}$	$\frac{x_{Si}}{1-x_H}$	$\frac{x_{Fe}}{1-x_H}$
0	0	$+\infty$	1	$+\infty$
0,4	0,013	0,323	0,984	6,2	0,98	0,079
0,5	0,035	0,258	0,963	..	0,90	0,112
0,6	0,078	0,202	0,925	3,7	0,83	0,150	0,021	..
0,7	0,157	0,154	0,864	..	0,764	0,187	0,033	0,008
0,8	0,297	0,108	0,776	2,1	0,688	0,221	0,044	0,023
0,9	0,545	0,060	0,655	..	0,603	0,224	0,055	0,059
1,0	1,000	0,000	0,500	0	0,500	0,250	0,062 ₅	0,125
1,02	1,133	-0,017	0,465	..	0,478	0,248	0,063 ₄	0,143
1,04	1,287	-0,034	0,431	-0,6	0,454	0,246	0,064 ₂	0,163
1,10	1,888	-0,112	0,315	-2,1	0,387	0,234	0,064 ₇	0,228
1,15	2,628	-0,297	0,188	-5,7	0,333	0,218	0,063 ₃	0,291
..	3	$-\infty$	0	$-\infty$

et de la densité. Pour obtenir $x(z)$ il faut en plus tenir compte de l'équation de transfert d'énergie. Les courbes de la figure 2, p. 21, représentatives de la variation de composition du mélange des éléments lourds avec la cote, montrent qu'il n'est pas légitime de remplacer le mélange des éléments lourds par un élément moyen. Nous pouvons remarquer de plus que, dès que

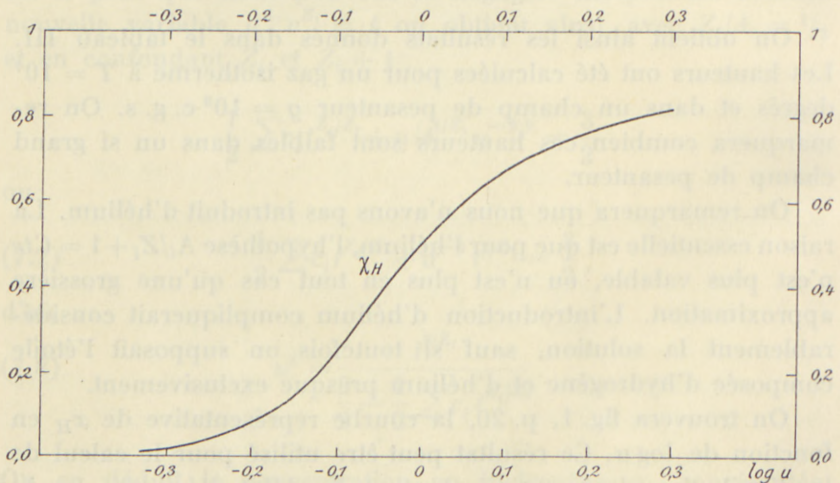


Fig. 1. Variation de la concentration x_H en hydrogène en fonction de l'altitude dans la couche de mélange.

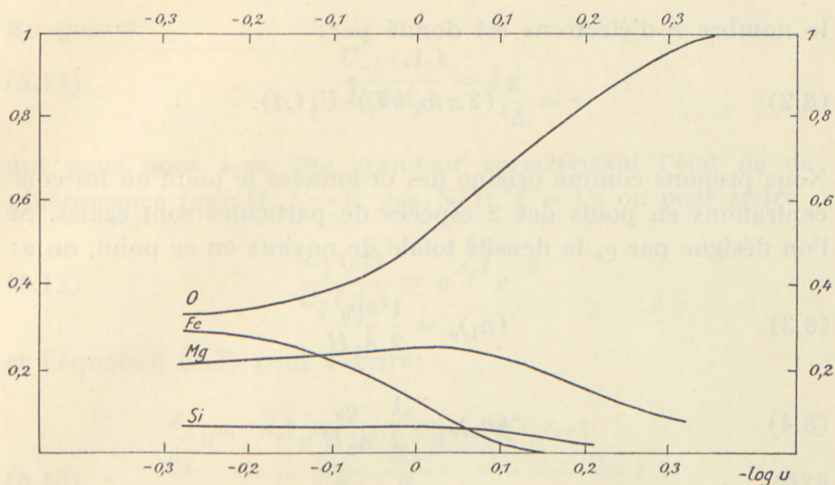


Fig. 2. Variations des concentrations [O] [Fe] [Mg] [Si] au sein du mélange d'éléments lourds. On remarquera que la concentration en oxygène croît considérablement à l'extérieur de la couche de mélange, c'est-à-dire là où la concentration en hydrogène est déjà grande.

$\log u > 0,2$ par exemple, seul l'oxygène est pratiquement présent, comme élément lourd. Dans le calcul du coefficient d'absorption et de la température il pourra être considéré comme légitime de supposer avoir affaire à un mélange d'hydrogène et d'oxygène seulement.

Ces conclusions seront appliquées plus tard à l'étude de certains modèles de naines blanches.

B. Phénomènes dûs aux dégénérescences.

8. Phénomènes dûs à la dégénérescence du gaz d'électrons.

Nous allons étudier le mélange de deux espèces atomiques au voisinage de la couche de mélange, lorsque le gaz d'électrons est plus ou moins dégénéré. L'hypothèse supplémentaire d'un champ de pesanteur intense, et par conséquent d'une faible hauteur de mélange permet alors l'emploi d'un développement réduit au premier terme pour décrire l'état du gaz d'électrons. Nous supposons le mélange isotherme.

En posant

$$(8.1) \quad U_\nu(A) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^\infty \frac{U^\nu du}{A e^u + 1},$$

le nombre r d'électrons est donné par:

$$(8.2) \quad r = \frac{2}{h^3} (2\pi m_e kT)^{\frac{3}{2}} U_{\frac{1}{2}}(A).$$

Nous prenons comme origine des ordonnées le point où les concentrations en poids des 2 espèces de particules sont égales. Si l'on désigne par ϱ_0 la densité totale de noyaux en ce point, on a:

$$(8.3) \quad (n_1)_0 = \frac{1}{2} \frac{\varrho_0}{A_1 H}$$

$$(8.4) \quad (n_2)_0 = \frac{1}{2} \frac{\varrho_0}{A_2 H}$$

avec

$$(8.5) \quad H A_i = m_i,$$

m_i masse d'un noyau d'espèce i . Dans ces conditions

$$(8.6) \quad r_0 = \frac{1}{2} \frac{\varrho_0}{H} \left(\frac{Z_1}{A_1} + \frac{Z_2}{A_2} \right)$$

et l'on a, pour le quotient r/r_0 , en utilisant les notations (7,1) et (7,2) pour u et v qui valent 1 pour $z = 0$:

$$(8.7) \quad \frac{r}{r_0} = \frac{U_{\frac{1}{2}}(A)}{U_{\frac{1}{2}}(A_0)} = \frac{\frac{Z_1}{A_1} u^{A_1} v^{Z_1} + \frac{Z_2}{A_2} u^{A_2} v^{Z_2}}{\frac{Z_1}{A_1} + \frac{Z_2}{A_2}};$$

A_0 est défini par (8,2) et (8,6) et on a:

$$(8.8) \quad A = A_0 u^{A_e} v^{-1}.$$

En supposant que A ne varie pas de façon considérable, on a:

$$(8.9) \quad \log \frac{U_{\frac{1}{2}}(A)}{U_{\frac{1}{2}}(A_0)} = \log \frac{U_{\frac{1}{2}}(A_0) + \frac{\delta A}{A} U_{-\frac{1}{2}}(A_0)}{U_{\frac{1}{2}}(A_0)} \cong \frac{\delta A}{A} \frac{U_{-\frac{1}{2}}(A_0)}{U_{\frac{1}{2}}(A_0)}$$

$$(8.10) \quad \log \frac{U_{\frac{1}{2}}(A)}{U_{\frac{1}{2}}(A_0)} \cong \frac{U_{-\frac{1}{2}}(A_0)}{U_{\frac{1}{2}}(A_0)} \left(\frac{A_e}{u} - \frac{1}{v} \right).$$

En posant

$$(8.11) \quad \frac{U_{-\frac{1}{2}}(A_0)}{U_{\frac{1}{2}}(A_0)} = \xi,$$

qui pour nous sera une grandeur caractérisant l'état de dégénérescence (gaz D. $\xi = 0$, gaz N. D. $\xi = 1$), on peut écrire

$$(8.12) \quad \frac{U_{\frac{1}{2}}(\Lambda)}{U_{\frac{1}{2}}(\Lambda_0)} = u^{A_e \xi} v^{-\xi}$$

et l'équation (8.7) peut s'écrire:

$$(8.13) \quad \frac{\frac{Z_1}{A_1} u^{A_1 - A_e \xi} v^{Z_1 + \xi} + \frac{Z_2}{A_2} u^{A_2 - A_e \xi} v^{Z_2 + \xi}}{\frac{Z_1}{A_1} + \frac{Z_2}{A_2}} = 1.$$

9. Hauteur de mélange. Nous allons donner une définition plus logique et plus précise de la hauteur de mélange de la façon suivante. Dans un mélange, le nombre de particules d'espèce 1 et d'espèce 2 est:

$$(9.1) \quad n_1 = \frac{1}{2} \frac{\varrho_0}{A_1 H} u^{A_1} v^{Z_1}$$

$$(9.2) \quad n_2 = \frac{1}{2} \frac{\varrho_0}{A_2 H} u^{A_2} v^{Z_2}.$$

Nous avons à utiliser pour le calcul du débit d'énergie dans une région isotherme l'expression:

$$(9.3) \quad \int n_1 n_2 dz$$

et nous appelons hauteur de mélange h la quantité

$$(9.4) \quad h = \frac{\int n_1 n_2 dz}{\frac{1}{4} \frac{\varrho_0^2}{A_1 A_2 H^2}} = \int u^{A_1 + A_2} v^{Z_1 + Z_2} dz.$$

Nous allons transformer cette expression afin de la calculer à l'aide de (8.13), (7.1) et (7.2).

En vertu de (7,1) nous avons

$$(9.5) \quad \frac{du}{u} = -\vartheta Hgdz$$

et par conséquent:

$$(9.6) \quad h = \frac{1}{\vartheta Hg} \int u^{A_1+A_2} v^{Z_1+Z_2} \frac{du}{u}.$$

Nous posons, dans (8.13):

$$(9.7) \quad t = \frac{\frac{Z_1}{A_1}}{\frac{Z_1}{A_1} + \frac{Z_2}{A_2}} u^{A_1-A_e\xi} v^{Z_1+\xi}.$$

En posant

$$(9.8) \quad \zeta = \frac{Z_2 + \xi}{Z_1 + \xi},$$

on a:

$$(9.9) \quad u^{A_2-A_e\xi-\zeta(A_1-A_e\xi)} = \frac{1-t}{t^\zeta} \frac{\frac{Z_1}{A_1} + \frac{Z_2}{A_2}}{\frac{Z_2}{A_2}} \left(\frac{\frac{Z_1}{A_1}}{\frac{Z_1}{A_1} + \frac{Z_2}{A_2}} \right)^\zeta.$$

Posons:

$$(9.10) \quad \alpha = \frac{\frac{Z_1}{A_1}}{\frac{Z_1}{A_1} + \frac{Z_2}{A_2}} \quad 1-\alpha = \frac{\frac{Z_2}{A_2}}{\frac{Z_1}{A_1} + \frac{Z_2}{A_2}}.$$

L'intégrale que nous avons à calculer s'écrit alors, en raison de (9.7):

$$(9.11) \quad \int u^{A_1+A_2} \left(\frac{t}{\alpha} u^{-A_1+A_e\xi} \right)^{\frac{Z_1+Z_2}{Z_1+\xi}} \frac{du}{u}.$$

En posant encore:

$$(9.12) \quad A = A_2 - A_e\xi - \zeta(A_1 - A_e\xi),$$

on tire de (9.9):

$$(9.13) \quad A \frac{du}{u} = \left(-\frac{1}{1-t} - \frac{\zeta}{t} \right) dt.$$

L'intégrale (9.11) s'écrit donc :

$$(9.14) \quad \frac{1}{A} \int_0^1 u^{A_1+A_2-(A_1-A_e \xi)} \frac{Z_1+Z_2}{Z_1+\xi} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\frac{Z_1+Z_2}{Z_1+\xi}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{\xi}{t}\right) dt.$$

En portant l'expression (9.9) pour $u(t)$ dans (9.14), on obtient :

$$(9.15) \quad \frac{1}{A} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{t^\zeta} \frac{\alpha^\zeta}{1-\alpha}\right)^{A_1+A_2-(A_1-A_e \xi)} \frac{Z_1+Z_2}{Z_1+\xi} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\frac{Z_1+Z_2}{Z_1+\xi}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{\xi}{t}\right) dt.$$

En vertu de (8.13) et de (9.7), t est compris entre 0 et 1. On a donc une intégrale Eulérienne de première espèce. Le coefficient numérique dans l'intégrale (9.15) est

$$(9.16) \quad \frac{1}{A} (1-\alpha)^{-1-\frac{2\xi(A_1+Z_1A_e)}{(Z_1+\xi)A}} \alpha^{-1+\frac{2Z_2A_e\xi}{(Z_1+\xi)A}}$$

et l'intégrale s'écrit :

$$(9.17) \quad \left\{ \int_0^1 = B\left(1+2\frac{\xi(A_1+Z_1A_e)}{(Z_1+\xi)A}, 2-\frac{2Z_2A_e\xi}{(Z_1+\xi)A}\right) + \right. \\ \left. + \zeta B\left(2+\frac{2\xi(A_1+Z_1A_e)}{(Z_1+\xi)A}, 1-\frac{2Z_2A_e\xi}{(Z_1+\xi)A}\right) \right\}.$$

En vertu de la relation

$$(9.18) \quad B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

et en négligeant A_e/A , ce qui n'est incorrect que lorsque A est du même ordre de grandeur que A_e , l'expression (9.18) se simplifie beaucoup et devient :

$$(9.19) \quad \frac{1}{2+\frac{2\xi(A_1+Z_1A_e)}{(Z_1+\xi)A}} \left(\frac{1}{1+\frac{2\xi(A_1+Z_1A_e)}{(Z_1+\xi)A}} + \zeta \right).$$

On obtient alors pour la hauteur de mélange:

$$(9.20) \quad \left\{ \begin{aligned} h &= \frac{kT}{Hg} \left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^{1 + \frac{2\xi(A_1 + Z_1 A_e)}{(Z_1 + \xi)A}} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{2} \frac{1}{A + \frac{\xi(A_1 + Z_1 A_e)}{Z_1 + \xi}} \\ &\left(\zeta + \frac{1}{1 + \frac{2\xi(A_1 + Z_1 A_e)}{(Z_1 + \xi)A}} \right). \end{aligned} \right.$$

Dans le cas où $\xi = 0$ (gaz D.), (9.20) se réduit à

$$(9.21) \quad h = \frac{kT}{Hg} \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{2} \frac{\zeta + 1}{A_2 - \zeta A_1}$$

qui est à une petite différence numérique près l'expression déjà trouvée (34). La différence provient d'une meilleure évaluation de la hauteur de mélange. Pour donner une idée de l'influence de la dégénérescence sur la hauteur de mélange, nous allons calculer pour $A_2 = 24$, $A_1 = 1$, $Z_2 = 12$, $Z_1 = 1$ les variations de h avec ξ . Dans ce cas, on a:

$$(9.22) \quad \alpha = \frac{2}{3} \quad 1 - \alpha = \frac{1}{3} \quad A = 24 - \zeta.$$

On obtient le tableau IV donnant h/h_D en fonction de ξ et les valeurs correspondantes de kT/ε_0 (ε_0 , énergie maximum au zéro absolu) et de ϱ/μ pour $T = 10^7$ degrés. Les tables de E. C. STONER (46) des fonctions $U_{-1/2}$, $U_{1/2}$ et $U_{3/2}$ ont servi à dresser le tableau.

Tableau IV.

ξ	h/h_D	kT/ε_0	$\log \varrho/\mu$ ($T=10^7$ degrés)
1	0,406	∞	$-\infty$
0,8	0,466	1,06	2,246
0,6	0,522	0,55	2,67
0,4	0,617	0,294	3,08
0,2	0,745	0,151	3,51
0	1	0	∞

On voit que la dégénérescence ne modifie pas considérablement la valeur de la hauteur de mélange et que cette hauteur est plus faible dans le cas de non dégénérescence.

10. Dégénérescence dans le gaz de noyaux.

a) Statistique de Bose. Si l'on se place au zéro absolu, tous les atomes se répartissent dans un état d'énergie minimum, donc d'énergie potentielle nulle. Ceci implique pour chaque espèce

$$(10.1) \quad m_i \varphi - Z_i e \psi = 0.$$

Cette condition ne peut être satisfaite simultanément pour toutes les espèces atomiques à spin entier. Il y a donc séparation complète des éléments obéissant à la statistique de Bose et ces éléments sont superposés dans l'ordre m_i/Z_i décroissant.

b) Statistique de Bose et statistique de Fermi. La condition (10.1) détermine le potentiel électrique. Les particules obéissant à la statistique de Fermi sont alors en nombre:

$$(10.2) \quad n_i = \frac{8\pi}{3h^3} (p_0^2 - 2m_i W_i)^{\frac{3}{2}}$$

et le nombre d'électrons est:

$$(10.3) \quad n_e = \frac{8\pi}{3h^3} (p_e^2 - 2m_e W_e)^{\frac{3}{2}}$$

avec

$$(10.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_1 = m_1 \varphi - Z_1 e \psi \\ \quad = \left(m_1 - Z_1 \frac{m_i}{Z_i} \right) \varphi \\ W_e = \left(m_e + \frac{m_i}{Z_i} \right) \varphi. \end{array} \right.$$

Le nombre n_i des particules obéissant à la statistique de Bose est donné par la condition de neutralité électrique (une seule espèce à la fois):

$$(10.5) \quad \left\{ \begin{aligned} Z_i n_i + Z_1 \frac{8\pi}{3h^3} \left(p_0^2 - 2m_1 \left(m_1 - Z_1 \frac{m_i}{Z_i} \right) \varphi \right)^{\frac{3}{2}} = \\ = \frac{8\pi}{3h^3} \left(p_e^2 - 2m_e \left(m_e + \frac{m_i}{Z_i} \right) \varphi \right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \right.$$

Les constantes p_0 et p_e sont déterminées par les conditions relatives au nombre total de particules i et 1 en présence. Le nombre de particules d'espèce 1 subit une discontinuité chaque fois que l'on passe d'une espèce i à une autre, en raison du changement de potentiel électrique. Il peut enfin y avoir une région de pur hydrogène et dans ce cas la relation entre les potentiels est donnée par :

$$(10.6) \quad Z_1 \frac{8\pi}{3h^3} (p_0^2 - 2m_1(m_1\varphi - Z_1 e\psi))^{\frac{3}{2}} = \frac{8\pi}{3h^3} (p_e^2 - 2m_e(m_e\varphi + e\psi))^{\frac{3}{2}}.$$

A travers chaque surface de discontinuité de la densité on doit avoir continuité de la pression. Cette condition peut être satisfaite en supposant que les potentiels φ et ψ subissent une discontinuité. Si l'on a p éléments obéissant à la statistique de Bose, de l'hydrogène et des électrons, on a p équations de continuité pour la pression, $p + 1$ conditions pour le nombre de particules déterminant les $p + 1$ constantes présentes dans les potentiels et les positions des p surfaces de discontinuité.

Traitons plus simplement le cas d'un seul élément. L'équation (10.5) est la seule à être satisfaite, tant que $n_i \neq 0$. Lorsque n_i s'annule, seule l'équation (10.6) est satisfaite. Nous supposons que p_e^2 étant très grand devant $m_e W_e$, le nombre d'électrons est sensiblement constant :

$$(10.7) \quad Z_i n_i + Z_1 \frac{8\pi}{3h^3} \left(p_0^2 - 2m_1 \left(m_1 - Z_1 \frac{m_i}{Z_i} \right) \varphi \right)^{\frac{3}{2}} = r.$$

Calculons sur quelle hauteur $Z_i n_i$ varie de 0 à r/Z_i . L'équation

$$(10.8) \quad Z_1 \frac{8\pi}{3h^3} \left(p_0^2 - 2m_1 \left(m_1 - Z_1 \frac{m_i}{Z_i} \right) \varphi \right)^{\frac{3}{2}} = r - Z_i n_i$$

donne les deux équations suivantes

$$(10.9) \quad \begin{cases} p_0^2 - 2 m_1 \left(m_1 - Z_1 \frac{m_i}{Z_i} \right) \varphi = \left(\frac{r h^3}{8 \pi Z_i} \right)^{\frac{2}{3}} \\ p_0^2 = 0 \end{cases}$$

en prenant pour origine $\varphi = 0$ quand $p_0 = 0$ (pas de protons).
On a ainsi:

$$(10.10) \quad h g = \frac{1}{2 m_1 \left(Z_1 \frac{m_i}{Z_i} - m_1 \right)} \left(\frac{3 r h^3}{8 \pi Z_i} \right)^{\frac{2}{3}}$$

ou numériquement:

$$(10.11) \quad h = [9.814] \frac{g^{-\frac{2}{3}}}{g \left(\frac{A_i}{Z_i} - 1 \right)}$$

Nous avons déjà donné (44) l'expression de la hauteur de mélange pour un gaz dégénéré de protons et un gaz parfait de noyaux. On avait trouvé:

$$(10.12) \quad h = [9.923] \frac{g^{-\frac{2}{3}}}{g \left(\frac{A_i}{Z_i} - 1 \right)}$$

On voit, que lorsque l'un des gaz de noyaux est un gaz de Fermi, la hauteur de mélange est déterminée par lui, en raison de la grande énergie d'agitation des noyaux du gaz de Fermi.

II. L'ionisation de l'hydrogène.

I. Introduction.

1. L'étude de l'état de l'hydrogène aux densités relativement élevées est absolument essentielle pour les naines blanches. D'abord parce que l'atmosphère des naines blanches est constituée d'hydrogène pur. Ensuite parce que l'on atteint très rapidement, pour de faibles profondeurs optiques, des densités considérables.

Alors que d'ordinaire, à des températures de 30.000 degrés, on a seulement des densités de 10^{14} ou 10^{15} ions positifs hydrogène

par unité de volume, dans le cas des naines blanches ce sont facilement des densités de 10^{18} ou 10^{20} . Il n'est pas possible alors de tenir compte d'une manière arbitrairement simple de l'ionisation de pression, par exemple en coupant la somme d'états en un point convenable. D'autre part, la méthode des volumes exclus (15) (16) ne donne que des résultats extrêmement grossiers, et a le tort de ne donner aucune indication sur l'état des atomes neutres.

Une méthode parfaitement correcte, tant du point de vue de l'ionisation que du calcul du coefficient d'absorption et de la conductibilité serait la suivante: placer les protons en des points déterminés distribués au hasard dans une enceinte close, déterminer tous les niveaux d'énergie possibles pour les électrons, distribuer ces électrons parmi les niveaux d'énergie en accord avec la température du gaz, à l'aide des fonctions d'onde obtenues, calculer l'énergie potentielle des protons en fonction de leurs coordonnées et l'utiliser pour trouver à l'aide de l'équation de Schrödinger leur mouvement. Cette méthode est en fait celle qui est utilisée dans les théories du corps solide, mais elle est essentiellement simplifiée par le fait que les atomes ne sont pas distribués parfaitement au hasard, mais au voisinage des nœuds d'un réseau. Il est donc nécessaire d'employer ici une théorie statistique pour arriver à un résultat.

Le principe de la théorie statistique est le suivant: étant donné un atome supposé à l'état neutre, il est soumis à un certain champ électrique, et l'on a à déterminer la probabilité $W(F) dF$ que ce champ soit compris entre les valeurs F et $F + dF$. Sous l'influence de ce champ, les niveaux sont perturbés, et pour les grandes valeurs du nombre quantique principal n , cette perturbation peut être assez forte pour empêcher les états d'exister. On a donc un nombre moyen $NW(F) dF$ d'atomes soumis au champ F et dont l'énergie d'ionisation est plus faible que celle des atomes en l'absence de champ. Il est alors possible de dénombrer les états d'énergie E des électrons, en prenant pour origine des énergies celle des électrons libres de vitesse nulle. En conséquence, les électrons libres ont des énergies positives, les électrons liés des énergies négatives.

Cette théorie est linéaire, car elle ne tient compte que de la valeur du champ électrique F au point considéré, et non pas

des valeurs grad F , grad grad F etc. . . . En d'autres termes, les dimensions de l'atome sont supposées négligeables devant l'hétérogénéité du champ. Mise à part l'extrême complication qu'implique l'introduction de ces grandeurs, nous serons amenés, pour dégager les faits essentiels, à d'autres simplifications plus importantes que celle du champ uniforme.

Cette théorie a un caractère de première approximation, car nous supposerons que le champ F ne modifie que d'une quantité négligeable les niveaux d'énergie et les probabilités de transition, bien que nous tenions compte de la destruction des états par les champs intenses. Il serait évidemment plus correct de tenir compte individuellement des états séparés par le champ, mais il ne semble pas que l'introduction de cette complication soit justifiée.

MROWKA (26) a essayé de traiter le problème de l'élargissement des raies spectrales par la mécanique ondulatoire. Mais sa théorie suppose que seule l'action des atomes neutres est à considérer et que la température est assez basse pour que tous les atomes d'hydrogène soient dans l'état fondamental. Il s'agit donc d'un cas extrêmement différent de celui que nous proposons d'étudier.

II. État de l'hydrogène.

2. Dénombrement des états. Ionisation. Nous supposerons un volume où se trouvent N_1 ions positifs N_e électrons et N_0 atomes neutres par cm^3 .

Un atome neutre, de nombre quantique principal n , placé dans un champ F est susceptible d'avoir $2n-1$ niveaux d'énergie. Soit x le nombre quantique «électrique», nous avons $2n-1$ niveaux d'énergie $-E_{nx}(F)$ avec $-(n-1) < x < n-1$. Le poids statistique de chacun de ces états est g_{nx} . Soit $W(F)$ la probabilité pour que le champ soit compris entre F et $F + dF$. Pour les fortes valeurs de F les niveaux sont détruits, alors $g_{nx} = 0$. Comme nous avons fait choix pour origine des énergies des électrons de vitesse nulle, nous dénombrons les états de la façon suivante.

Il y a N_1 protons et $N_1 g_{nx} W(F) dF$ états possibles d'énergie E_{nx} . Le nombre d'électrons liés dans ces niveaux est:

$$(2.1) \quad dn_1 = N_1 g_{nx} W(F) dF \frac{1}{1 + e^{-\vartheta E_{nx} - \alpha}}$$

où $\vartheta = 1/kT$ et α est une constante déterminée de la façon suivante.

Le nombre total d'électrons est:

$$(2.2) \quad N_e + N_0 = \int dn_0 + \int_0^\infty \frac{8 \pi p^2 dp}{h^3} \frac{1}{1 + e^{\frac{p^2}{2mkT} - \alpha}}.$$

Le nombre total d'électrons libres est donné par la seconde intégrale et le nombre total d'électrons liés par la première:

$$(2.3) \quad N_0 = N_1 \sum_{n,x} \int_0^\infty \frac{g_{nx} W(F) dF}{1 + e^{-\vartheta E_{nx} - \alpha}}$$

$$(2.4) \quad N_e = \int \frac{8 \pi p^2 dp}{h^3} \frac{1}{1 + e^{\frac{p^2}{2m} - \alpha}}.$$

Lorsqu'on est loin des conditions de dégénérescence, on a plus simplement:

$$(2.5) \quad N_e = 2 \frac{(2 \pi m_e kT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} e^\alpha$$

$$(2.6) \quad N_0 = N_1 \sum_{n,x} \int_0^\infty g_{nx} W(F) e^{\vartheta E_{nx}} dF \cdot e^\alpha;$$

par élimination de e^α , on obtient une expression analogue à celle de Saha:

$$(2.7) \quad \frac{N_e N_1}{N_0} = \frac{2 \cdot (2 \pi mkT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \frac{1}{\sum_{nx} \int_0^\infty g_{nx} W(F) e^{\vartheta E_{nx}} dF}$$

où la somme au dénominateur du second membre est l'équivalent de l'habituelle somme d'états et se ramène à celle-ci lorsque la densité tendant vers zéro, le champ F devient extrêmement faible et sans influence sur les niveaux.

3. En réalité, pour un niveau nx donné, l'intégrale n'est pas prise jusqu'à l'infini, mais seulement jusqu'à la valeur du champ F qui détruit l'état nx . On doit donc écrire pour la somme Σ :

$$(3.1) \quad \Sigma = \sum_{nx} \int_0^{F_{nx}} g_{nx} W(F) dF e^{jE_{nx}}.$$

La détermination de F_{nx} est donc essentielle à la poursuite du calcul. Nous suivrons pour cela une méthode très analogue à celle de PANNEKOEK (28). Cette méthode est la suivante. Dans le champ F , l'atome d'hydrogène subit une destruction spontanée analogue à la radioactivité α , l'électron franchissant la barrière de potentiel à l'intérieur de laquelle il se trouve enfermé. Cette destruction s'opère avec une durée de vie δ donnée par LANCZOS (23)

$$(3.2) \quad \delta = \frac{\pi e^2 e^{-2I_2}}{h a_0 2 I_1} = 2,066 \cdot 10^{16} \frac{e^{-2I_2}}{2 I_1}$$

où I_1 et I_2 sont reliés aux intégrales elliptiques complètes de première et deuxième espèce. Lorsque cette durée de vie δ est plus courte qu'un temps α lié à la durée de vie de l'atome effectuant des transitions spontanées (de l'ordre de 10^{-8} sec.), nous dirons avec Pannekoek que l'état a cessé d'exister. La valeur de α peut être choisie arbitrairement sans changer considérablement les résultats en raison de la présence dans δ d'une exponentielle variant très rapidement. Nous avons pris ici $\alpha = 10^{-8}$ sec.

Le système de Lanczos, reproduit par Pannekoek est le suivant:

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon = \frac{2 a_0^2}{e} F n^3 & \tau = 8 \gamma_2 n \varepsilon = \sin^2 \varphi \\ k = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi & k' = \sqrt{1 - k^2} \\ z = 3 \varepsilon I_2 = 2 \cos \frac{\varphi}{2} \cdot E' - 2 \sin \varphi \sin \frac{\varphi}{2} \cdot K' \\ \frac{2 I_1}{n^2} = 2 \cos \frac{\varphi}{2} (K - E) \end{array} \right.$$

dans lequel K et E sont les fonctions elliptiques complètes de première et seconde espèce de module k et K' , E' les mêmes de

module k' . γ_2 représente la fraction rouge du réseau de raies Stark détruite par le champ F .

Les fonctions $z = 3 \varepsilon I_2$ et $y = \log \frac{\varepsilon I_1}{n^2}$ ont été tabulées par PАННЕКОЕК (28). Comme nous supposons la différence $E_{nx} - E_n$ petite devant E_n , nous pouvons définir la disparition des états dans le champ F par la condition $\gamma_2 = 1/2$.

La relation $\delta = \alpha$ qui peut s'écrire:

$$(3.4) \quad 16,01 - 2 \cdot 0,4343 \frac{z}{3 \varepsilon} - y + \log \frac{\varepsilon}{n^2} = \log \alpha$$

ou

$$(3.5) \quad 16,01 - \log \alpha - y + \log \tau - \log 4n - \log n^2 = \frac{z}{3,454} \frac{4n}{\tau}$$

nous détermine complètement τ_n . On en déduit ensuite:

$$(3.6) \quad \tau_n = 4n \frac{2a_0^2}{e} F n^3,$$

d'où:

$$(3.7) \quad F = \frac{\tau_n}{4,68 \cdot 10^{-7} n^4} = 2,14 \cdot 10^6 \frac{\tau_n}{n^4}.$$

Le résultat est donné dans le tableau I.

Tableau I.

n	$\log \tau_n$	$\log F_n$	$\log N_1^{2/3} \frac{F_n}{F_0}$	Destruction des états pour $\log N_1$	Recouvrement des raies pour $\log N_1$
1	1,356	5,686	14,588	21,873	23,257
2	1,583	4,709	13,611	20,417	21,000
3	1,695	4,117	13,019	19,529	19,678
4	1,764	3,686	12,588	18,883	18,742
5	1,810	3,344	12,246	18,370	18,014
6	1,842	3,059	11,961	17,943	17,421
7	1,866	2,815	11,717	17,577	16,919
8	1,883	2,601	11,503	17,254	16,483
9	1,899	2,411	11,313	16,972	16,103
10	1,911	2,241	11,143	16,715	15,757
11	1,920	2,085	10,987	16,480	15,447
12	1,927	1,941	10,843	16,268	15,164
13	1,935	1,810	10,712	16,069	14,904

τ est une fonction lentement variable de n alors que le dénominateur contenant n^4 croît très rapidement.

Lorsque k tend vers 1, k' tend vers zéro, $z \cong \frac{5\sqrt{2}}{3\pi} k'^4$ et on a

$$(3.8) \quad 4n^3 \cong [7,86] \log_e \frac{4}{k'},$$

ce qui entraîne de très grandes valeurs de n (n de l'ordre de 300).

4. Il est nécessaire maintenant de préciser la fonction de distribution $W(F) dF$. Cette fonction est évidemment donnée — en principe — par une méthode de champ self-consistent. Chaque proton est entouré d'électrons libres qui font plus ou moins écran à sa charge. En d'autres termes, la théorie de HOLTSMARK (18) qui ne considère que des ions et des électrons ponctuels n'est sans doute pas correcte et cette conclusion a déjà été tirée par VERWEJ (51) de ses résultats relatifs aux contours de raies. Il semble bien que pour la théorie de l'ionisation, la théorie de Holtsmark ne convienne absolument pas et par contre que la théorie de RUSSELL et STEWART (33) donne simplement des résultats conformes à la théorie des volumes exclus et d'ailleurs de façon plus simple.

La loi de probabilité $W(F) dF$ — que nous écrivons ici $W(\beta) d\beta$ en utilisant le champ normal

$$(4.1) \quad F_0 = 2,61 e N_1^{2/3}$$

et la notation

$$(4.2) \quad \beta = \frac{F}{F_0}$$

est une fonction transcendante nouvelle de β

$$(4.3) \quad W(\beta) = \frac{2}{\pi\beta} \int_0^\infty v \sin ve^{-\left(\frac{v}{\beta}\right)^{3/2}} dv,$$

qui, pour les faibles valeurs de β , admet un développement dont le premier terme nous suffit:

$$(4.4) \quad W(\beta) = \frac{4}{3\pi} \beta^2.$$

Si nous supposons la densité d'ions N_1 très élevée (par exemple 10^{22}), le champ normal F_0 est très intense et la destruction des états a lieu même pour de très faibles valeurs de β . Si de plus, et uniquement pour la commodité de notre argumentation, nous supposons la température assez élevée pour que les exponentielles

$$(4.5) \quad e^{\beta E_{nx}}$$

se réduisent à l'unité, la somme Σ devient:

$$(4.6) \quad \Sigma = \sum_n 2n^2 \int_0^{\beta^2 n} \frac{4}{3\pi} \beta^2 d\beta$$

ou, en tenant compte des équations (3.7) (4.2) (4.4):

$$(4.7) \quad \Sigma = \sum_n \frac{1}{2\pi (4,68 \cdot 10^{-7} F_0)^3} \frac{\tau_n^3}{n^{10}}.$$

Cette somme est évidemment convergente et même très rapidement, mais nous remarquerons en raison de la valeur (4.1) du champ normal qu'elle est inversement proportionnelle à N_1^2 , N_1 nombre d'ions positifs. On conclut de la relation (2.7) avec $N_e = N_1$ que:

$$(4.8) \quad N_0 = \frac{1}{2\pi (4,68 \cdot 10^{-7} \cdot 2,61 e)^3} \cdot \frac{\sum_n \frac{\tau_n^3}{n^{10}}}{2(2\pi m k T)^{\frac{3}{2}}}$$

c. à. d. que, à température constante, N_0 serait constant pour les grandes densités. Ce résultat n'aurait en soi rien d'absurde, mais le calcul numérique de N_0 nous donne:

$$(4.9) \quad N_0 = \frac{[28,566]}{T^{\frac{3}{2}}}.$$

La valeur exagérément élevée de N_0 ainsi obtenue est en contradiction absolue avec toutes les indications de la théorie des volumes exclus qui indique une décroissance extrêmement rapide du nombre d'atomes neutres avec les densité croissantes.

Il a paru que ce résultat provenait de l'emploi de la théorie de Holtmark, de préférence à une autre. Nous avons donc essayé la théorie de RUSSELL et STEWART (33). Russell et Stewart,

exprimant que dans la sphère de rayon x , $x + dx$ se trouve un ion positif, et que cet ion, le plus proche de l'atome considéré, est aussi le seul à agir, obtiennent la fonction de distribution:

$$(4.10) \quad W(\beta) d\beta = \frac{1,50}{\beta^{\frac{5}{2}}} e^{-\beta^{-\frac{3}{2}}} d\beta$$

qui est identique à la fonction de Holtmark pour les grandes valeurs de β ($\beta > 50$ par exemple) mais qui en diffère très considérablement (en puissances de 10) quand β est très petit. Si nous supposons comme précédemment que la densité N_1 est élevée, et la température aussi, nous avons à utiliser l'intégrale

$$(4.11) \quad \int_0^{\beta_n} W(\beta) d\beta = e^{-\beta_n^{-\frac{3}{2}}},$$

ce qui donne pour la somme Σ :

$$(4.12) \quad \sum = \sum_n 2n^2 \exp - (4,68 \cdot 10^{-7} F_0)^{\frac{3}{2}} \frac{n^6}{x_n^{\frac{3}{2}}}.$$

Elle contient ainsi des exponentielles dont la valeur numérique est:

$$(4.13) \quad \exp - [23,151] N_1 \frac{n^6}{x_n^{\frac{3}{2}}}.$$

Le terme qui figure ici en exponentielle est tout à fait analogue au terme élémentaire que l'on obtient par la méthode des volumes exclus sous la forme donnée par FERMI (15). Une différence très importante est que le coefficient numérique est beaucoup plus grand. Pour donner un ordre de grandeur, l'exposant vaut 1 pour $n = 2$ lorsque $N_1 = [20,43]$, alors que la méthode des volumes exclus introduit pour le même résultat une valeur $N_1 = [23,1]$. Autrement dit l'effet Stark linéaire détruit les états stationnaires bien avant que se produisent des collisions au sens classique du terme. On trouvera dans le tableau I les densités pour lesquelles se produit la destruction des états quantiques (colonne 5). Ces valeurs correspondent aux densités pour lesquelles le champ normal (équation 4.1) est égal au champ F_n (colonne 4). On les comparera aux densités déduites de la for-

mule d'Inglis et Teller (équation 12.1) pour lesquelles se produit le recouvrement des raies (colonne 6).

C'est cet accord entre le résultat de la théorie des volumes exclus et l'emploi de la théorie statistique de Russell Stewart qui nous fait conclure à une impossibilité très réelle d'obtenir des résultats complètement corrects par la théorie de Holtsmark. Il serait en particulier intéressant de voir comment l'emploi de la fonction (4.10) modifierait les résultats de VERWEJ (51), particulièrement dans la partie centrale de ses profils de raies.

5. On pourrait chercher à améliorer la théorie de Holtsmark, mais les difficultés qui se présentent sont très grandes. Dans le but de montrer de quelle nature sont ces difficultés, nous allons tout d'abord rappeler de quelle nature est la méthode de Holtsmark.

Etant donnée à l'origine des coordonnées une particule, on veut mesurer le champ dans lequel elle est placée. Si l'on appelle 1, 2, ... n ... les différentes particules agissantes, chacune produisant un champ de composantes $X_i Y_i Z_i$, le champ à l'origine a pour composantes

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_0 = \Sigma X_i \\ Y_0 = \Sigma Y_i \\ Z_0 = \Sigma Z_i. \end{array} \right.$$

Si l'on appelle $dx_{1i} \cdots dx_{\nu i}$ la probabilité d'avoir une particule au point de coordonnées $x_{1i} \cdots x_{\nu i}$, la probabilité d'avoir un champ compris entre $X_0, X_0 + dX_0, Y_0, Y_0 + dY_0, Z_0, Z_0 + dZ_0$ est donnée par

$$(5.2) \quad W(X_0 Y_0 Z_0) = \frac{1}{V_N} \int \cdots \int \sigma_1 \cdots \sigma_N dx_{11} \cdots dx_{\nu N},$$

l'intégrale multiple portant sur le volume où les conditions

$$(5.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_0 < X < X_0 + dX_0 \\ \cdots \\ \cdots \end{array} \right.$$

sont satisfaites et V_N étant obtenu par intégration sur le volume total:

$$(5.4) \quad V_N = \int \cdots \int \sigma_1 \cdots \sigma_N dx_{11} \cdots dx_{\nu N}.$$

Afin d'étendre l'intégrale (5.2) à tout l'espace, Holtsmark introduit des facteurs de Dirichlet:

$$(5.5) \quad \left\{ \begin{aligned} H(X) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha \xi}{\xi} e^{i \delta \xi} d\xi \\ H(Y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \beta \eta}{\eta} e^{i \varepsilon \eta} d\eta \\ H(Z) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \gamma \zeta}{\zeta} e^{i \chi \zeta} d\zeta \end{aligned} \right.$$

avec les valeurs suivantes de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \chi$:

$$(5.6) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} dX_0 & \delta &= \sum_1^N X_n - X_0 \\ \beta &= \frac{1}{2} dY_0 & \varepsilon &= \sum_1^N Y_n - Y_0 \\ \gamma &= \frac{1}{2} dZ_0 & \chi &= \sum_1^N Z_n - Z_0. \end{aligned} \right.$$

Les intégrales (5.5) valent 1 ou 0 suivant que les inégalités suivantes sont satisfaites ou non:

$$(5.7) \quad -\alpha < \delta < \alpha \quad -\beta < \varepsilon < \beta \quad -\gamma < \chi < \gamma.$$

Comme α, β, γ sont des infiniments petits, Holtsmark écrit:

$$(5.8) \quad H(X) = \frac{dX_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\Sigma X_n - X_0)} d\xi;$$

d'où, pour W :

$$(5.9) \quad \left\{ \begin{aligned} W(X_0 Y_0 Z_0) dX_0 dY_0 dZ_0 &= \frac{1}{8\pi^3} dX_0 dY_0 dZ_0 \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\xi d\eta d\zeta e^{-i(\xi X_0 + \eta Y_0 + \zeta Z_0)} \\ &\quad \frac{1}{V_n} \underbrace{\int \cdots \int}_{W_n} \sigma_1 \cdots \sigma_N e^{i(\xi \Sigma X_n + \eta \Sigma Y_n + \zeta \Sigma Z_n)} dx_{11} \cdots dx_{\nu N}. \end{aligned} \right.$$

Nous introduirons ici une hypothèse différente de celle de Holtsmark: nous supposons que les particules 1, 2, \dots N ne sont identiques qu'en moyenne, et nous conserverons jusqu'à nouvel ordre l'indice i .

Nous avons en tout cas, comme Holtsmark:

$$(5.10) \quad V_N = V^N,$$

ce qui implique l'identité et l'indépendance des probabilités $\sigma_1 \dots \sigma_N$. Nous avons à calculer l'intégrale type:

$$(5.11) \quad J_i = \frac{1}{V} \int \dots \int_V e^{i(\xi X_i + \eta Y_i + \zeta Z_i)} \sigma_i dx_{i1} \dots dx_{i\nu}.$$

Si l'on suppose que la force $X_i Y_i Z_i$ agit suivant le rayon vecteur r_i , on peut écrire, en prenant pour $\xi \eta \zeta$ les composantes d'un vecteur \vec{s} faisant un angle θ avec le rayon vecteur r_i :

$$(5.12) \quad J_i = \frac{1}{V} \int \dots \int_V e^{i(\vec{s} \cdot \vec{r}_i)} \sigma_i dx_{i1} \dots dx_{i\nu}.$$

Nous avons évidemment

$$(5.13) \quad \sigma_i dx_{i1} \dots dx_{i\nu} = r_i^2 dr_i \sin \theta_i d\theta_i d\varphi_i$$

et l'on a en limitant l'intégration à une sphère de rayon R :

$$(5.14) \quad J_i = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_0^R r_i^2 dr_i \int_0^\pi d\theta_i \int_0^{2\pi} d\varphi_i e^{i(\vec{s} \cdot \vec{r}_i)}.$$

Posons $f_i = \frac{e}{r_i^2} g_i(r)$ avec $g_i = 1$ quand $r \rightarrow 0$.

On a:

$$(5.15) \quad \vec{s} \cdot \vec{r}_i = -\frac{e g_i}{r_i^2} \rho \cos \theta;$$

posons

$$(5.16) \quad e \rho \cos \theta \frac{g_i}{r_i^2} = \rho w_2 \frac{g_i}{r_i^2}$$

et prenons comme nouvelle variable

$$(5.17) \quad \frac{\rho w_2}{r_i^2} = u$$

on a alors:

$$(5.18) \quad J_i = \frac{3}{4\pi R^3} \iiint \sin \theta d\theta d\varphi \frac{(\rho w_2)^{\frac{3}{2}}}{2} \int_{\alpha}^{\infty} e^{iug_i(u)} u^{-\frac{5}{2}} du$$

avec $\alpha = \frac{\rho w_2}{R^2}$.

On a donc:

$$(5.19) \quad J_i = \frac{3}{4\pi} \iiint \sin \theta d\theta d\varphi \alpha^{\frac{3}{2}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{iug_i(u)} u^{-\frac{5}{2}} du.$$

La deuxième intégrale peut s'intégrer par parties:

$$(5.20) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\alpha}^{\infty} e^{iug_i(u)} u^{-\frac{5}{2}} du &= \frac{2}{3} \alpha^{-\frac{3}{2}} e^{i\alpha g_i(\alpha)} + \frac{4}{3} i \alpha^{-\frac{1}{2}} e^{i\alpha g_i(\alpha)} (g_i(\alpha) + \alpha g_i'(\alpha)) \\ &+ \frac{4}{3} \int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{iug_i(u)} (2ig_i' + iug_i'' - (g_i + ug_i')^2) du \\ &+ \dots; \end{aligned} \right.$$

comme α est très petit (R grand) on peut développer les exponentielles et on obtient:

$$(5.21) \quad \frac{2}{3} \alpha^{-\frac{3}{2}} + i \alpha^{-\frac{1}{2}} \left(2g_i + \frac{4}{3} \alpha g_i' \right) + \frac{4}{3} \int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{iug_i(u)} (2ig_i' + iug_i'' - (g_i + ug_i')^2) du.$$

On obtient alors pour J_i :

$$(5.22) \quad \left\{ \begin{aligned} J_i &= \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \left[1 + i\alpha (3g_i + 2\alpha g_i') + \right. \\ &\quad \left. + 2\alpha^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{iug_i(u)} (2ig_i' + iug_i'' - (g_i + ug_i')^2) du \right] \\ &= 1 + i \int \frac{d\Omega}{4\pi} \alpha (3g_i + 2\alpha g_i') + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int 2\alpha^{\frac{3}{2}} d\Omega \int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{iug_i(u)} (2ig_i' + iug_i'' - (g_i + ug_i')^2) du, \end{aligned} \right.$$

g_i étant une fonction paire par sa définition même, $\alpha g_i'$ est aussi une fonction paire et la première intégrale disparaît. La deuxième intégrale nous fournit une fonction compliquée de ϱ :

$$(5.23) \quad \left\{ \begin{aligned} J_i &= 1 + \frac{2\pi}{4\pi} 2 \cdot \frac{\varrho^{\frac{3}{2}}}{R^3} e^{\frac{3}{2}} \int_0^{\pi} (\cos \theta)^{\frac{3}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{iug_i(u)} \\ &\quad (2ig_i' + iug_i'' - (g_i + ug_i')^2) du. \end{aligned} \right.$$

En raison du fait que $\frac{4}{3} \pi R^3 n = N$, nombre de particules actives dans le volume considéré, on a pour le produit πJ_i :

$$(5.24) \quad \pi J_i = \exp \left\{ \frac{8\pi n}{3} e^{\frac{3}{2}} \varrho^{\frac{3}{2}} \frac{1}{N} \sum_1^N \int_0^{\pi} (\cos \theta)^{\frac{3}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{iug_i(u)} H_i(u) du \right\};$$

la somme $\frac{1}{N} \sum_1^N$ a la signification d'une moyenne étendue à toutes les fonctions possibles $g_i(r)$.

Holtmark suppose toutes ces fonctions g_i identiques à 1 et obtient ainsi le champ dû aux ions:

$$(5.25) \quad J^N = \exp [-4,21 n \varrho^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}}]$$

et par conséquent la fonction W :

$$(5.26) \quad W = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \varrho^2 d\varrho e^{-4,21 n \varrho^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}}} \frac{2}{\varrho F_0} \sin(\varrho F_0)$$

où F_0 est l'intensité du champ de composantes $X_0 Y_0 Z_0$.

6. Nous voyons donc par l'expression (5.24) que si une moyenne peut se définir, elle ne s'obtient pas sans calculs d'une extrême complication, comportant 4 intégrales successives portant respectivement sur u , θ , (i), et enfin ϱ . Il semble donc indispensable de faire une première simplification en supposant toutes les fonctions g_i identiques. On a alors:

$$(6.1) \quad W dX_0 dY_0 dZ_0 = dX_0 dY_0 dZ_0 \iiint \sin \theta d\theta d\varphi \varrho^2 d\varrho e^{-iF_0 \varrho \cos \theta} \exp [K(\varrho)],$$

ce qui donne:

$$(6.2) \quad W(X_0 Y_0 Z_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \varrho^2 d\varrho \frac{2 \sin \varrho F_0}{\varrho F_0} \exp [K(\varrho)],$$

avec pour $K(\varrho)$:

$$(6.3) \quad K(\varrho) = \frac{8\pi n}{3} e^{\frac{3}{2}\varrho} \int_0^\pi (\cos \theta)^{\frac{3}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} e^{iug(u)} H(u) du,$$

avec

$$(6.4) \quad H(u) = 2ig' + iug'' - (g + ug')^2$$

$$(6.5) \quad g(u) = g\left(\sqrt{\frac{\varrho w_2}{u}}\right).$$

On voit, par la nature des fonctions écrites que même les fonctions g les plus simples conduisent tout de même — en général — à des fonctions $K(\varrho)$ d'une extrême complication. En particulier, nous voyons qu'il serait possible, au moins en principe, de résoudre le système de deux équations intégrales successives (6.2) et (6.3) et d'obtenir la fonction $g(r)$ donnant la loi de probabilité de RUSSELL STEWART.

Les équations (5.24) et (6.2) en particulier nous montrent de quelle nature sont les difficultés d'une méthode statistique de champ self-consistent pour des atomes distribués au hasard.

Il serait possible d'adjoindre aux conditions (5.1) une condition exprimant que l'intégration se fait le long d'une surface d'énergie constante. Mais alors la séparation (5.11) des différentes variables est impossible, ce qui rend le calcul impraticable.

Nous voyons donc de quelle nature sont les difficultés d'amélioration de la théorie de Holtsmark. Il paraît ainsi plus sage de s'en tenir à une théorie au sens physique évident, analytiquement simple et donnant des résultats, pour les faibles densités conformes à la théorie de Holtsmark et pour les grandes densités conformes à la théorie des volumes exclus, autrement dit, la théorie de Russell et Stewart.

7. Tables d'ionisation. Calculons tout d'abord la contribution à la somme Σ des termes pour n grand. On a à calculer:

$$(7.1) \quad \sigma_n = \sum_n^\infty n^2 e^{-\beta_n^{-\frac{3}{2}}}$$

car, en raison de la valeur élevée de n , le terme e^{gE} peut être pris égal à l'unité.

On a :

$$(7.2) \quad \beta = 2,14 \cdot 10^6 \frac{\tau}{n^4 F_0}$$

et en vertu de (3.7) et (3.8) nous supposons τ sensiblement constant. On a alors

$$(7.3) \quad n^2 = \left(\frac{2,14 \cdot 10^6 \tau}{F_0} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\beta}}$$

et nous remplacerons la somme (7.1) par une intégrale :

$$(7.4) \quad \sigma_n = \int_n^\infty n^2 dn e^{-\beta n^{\frac{3}{2}}}$$

On a :

$$(7.5) \quad n^2 dn = \frac{1}{3} d(n^3)$$

$$(7.6) \quad = - \left(\frac{2,14 \cdot 10^6 \tau}{F_0} \right)^{\frac{3}{4}} \frac{1}{4} \beta^{-\frac{7}{4}} d\beta.$$

La somme (7.1) devient alors :

$$(7.7) \quad \sigma_n = \left(\frac{2,14 \cdot 10^6 \tau}{F_0} \right)^{\frac{3}{4}} \frac{1}{4} \int_0^{\beta_n} \beta^{-\frac{7}{4}} d\beta e^{-\beta^{-\frac{3}{2}}}$$

$$(7.8) \quad = \left(\frac{2,14 \cdot 10^6 \tau}{F_0} \right)^{\frac{3}{4}} \frac{1}{4} \frac{4}{3} \int_0^{\beta_n} d(\beta^{-\frac{3}{4}}) e^{-\beta^{-\frac{3}{2}}}.$$

Pour β petit, on peut réduire l'intégrale dans (7.8) au premier terme du développement asymptotique. On a alors :

$$(7.9) \quad \sigma_n = \left(\frac{2,14 \cdot 10^6 \tau}{F_0} \right)^{\frac{3}{4}} \frac{1}{3} \frac{e^{-\beta^{-\frac{3}{2}}}}{2 \beta^{-\frac{3}{4}}}$$

et, en vertu de (7.3), on obtient :

$$(7.10) \quad \sigma_n = \frac{n^3}{6} \frac{e^{-\beta n^{\frac{3}{2}}}}{\beta n^{\frac{3}{2}}}.$$

La table suivante nous montre la contribution σ_n pour $n = 13$ en fonction de la densité. On voit que pour des densités même relativement faibles, la contribution à la somme Σ des termes pour $n > 13$ devient tout à fait négligeable.

Tableau II.

Log N_1	$\beta^{-\frac{3}{2}}$	σ_{13}
15	0,0857	4217,1
16	0,857	181,59
17	8,57	0,0085

8. Méthode de calcul. Pour calculer les intégrales

$$(8.1) \quad \int_0^{\beta_n} e^{\vartheta W_n} W(\beta) d\beta$$

on procède de la façon suivante. On a:

$$(8.2) \quad W_n = E_n - E_F,$$

E_n étant l'énergie d'ionisation en l'absence de champ de l'état n , E_F étant l'énergie d'ionisation en l'absence de champ de l'état détruit par le champ F . On a donc à calculer:

$$(8.3) \quad 2 \sum_n n^2 e^{\vartheta E_n} \int_0^{\beta_n} W(\beta) d\beta e^{-\vartheta E_F}.$$

On a:

$$(8.4) \quad W(\beta) d\beta = d\left(e^{-\beta^{-\frac{3}{2}}}\right)$$

et l'on construit la courbe $e^{-\vartheta E_F}$ en fonction de $e^{-\beta^{-\frac{3}{2}}}$. On a seulement à déterminer l'aire de cette courbe. On trouvera sur la figure 3, p. 46, les formes de cette courbe pour différentes densités et pour $\theta = 0,2$. On obtient ainsi pour chaque valeur de la densité N_1 et de la température $\theta = \frac{5040}{T}$ la valeur de la somme. En fait, on calcule

$$(8.5) \quad 2 \sum_n n^2 e^{-\vartheta(E_0 - E_n)} \int_0^{\beta_n} W(\beta) d\beta e^{-\vartheta E_F}$$

qui est l'équivalent de la somme d'états. On en déduit, à l'aide

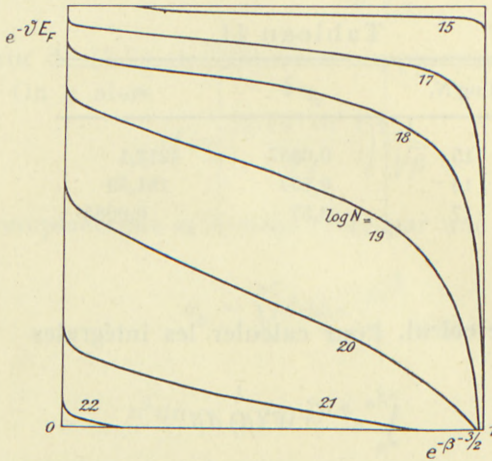


Fig. 3. Courbes pour l'intégration numérique de la formule (II 8,1).

de (2.7) N_0 en fonction de N_1 et de θ , et ensuite $N = N_1 + N_0$, donc $\varrho = NH$ en fonction de N_1 et θ , ainsi que l'ionisation:

$$(8.6) \quad x = \frac{N_1}{N_0 + N_1}$$

en fonction de N_1 et θ . A l'aide de la table (N_1, θ) on peut finalement construire une table $x(\varrho, \theta)$ (Des tables complètes sont en cours de préparation. Les tableaux III et IV en sont extraits).

Tableau III.
 x (degré d'ionisation)

$\log N_1$ \ θ	15	16	17	18	19	20	21	22	23
0,2	0,999	0,999	0,993	0,953	0,754	0,387	0,226	0,393	1,000
0,1	1,000	1,000	0,999	0,997	0,987	0,946	0,848	0,828	1,000
0,05	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,991	0,974	0,954	1,000
0,02	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,996	0,990	1,000
0,01	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,997	1,000

Tableau IV.
 $\bar{\chi}_{\text{volts}}^{(1)}$ (potentiel moyen d'ionisation)

$\log N_1$ θ	15	16	17	18	19	21	21	22	23
0,2	1,326	5,113	8,432	10,996	11,423	10,442	8,017	2,077	0,000
0,1	0,449	0,625	1,481	3,237	6,223	8,137	7,355	1,511	0,000
0,05	0,239	0,267	0,578	1,402	3,336	5,449	6,673	1,209	0,000
0,02	0,192	0,196	0,383	0,892	1,838	3,809	6,143	1,025	0,000
0,01	0,182	0,181	0,343	0,744	1,579	3,343	5,931	0,956	0,000

(1) On remarquera que $\bar{\chi}$ décroît quand la densité décroît. Cela est dû à la possibilité du peuplement des niveaux excités aux faibles densités.

9. Compressibilité adiabatique. Le calcul de la couche convective est important, comme nous l'avons vu à propos de la théorie du triage. Il est nécessaire, pour en établir les limites, de calculer le coefficient de compressibilité adiabatique. On peut remarquer que l'influence de l'ionisation sur le coefficient ($d \log T / d \log P$) est la même, que l'ionisation ait pour origine une élévation de température ou une augmentation de pression.

En effet, si on se trouve dans une région de demi-ionisation de température, une compression adiabatique élève la température, donc le nombre d'atomes présents et l'élévation de température est moindre que celle qui se produit en l'absence d'ionisation. L'effet est le même si on se trouve dans une région d'ionisation de pression. Il faut donc s'attendre à trouver une vaste région de températures et de densités où ($d \log T / d \log P$) est inférieur à 0,4, valeur maximum pour un gaz monoatomique.

Une transformation adiabatique est définie par

$$(9.1) \quad dE + P dV = 0.$$

La pression P est:

$$(9.2) \quad PV = N(1 + x) kT$$

et l'énergie est:

$$(9.3) \quad E = \frac{3}{2} N(1 + x) kT - \sum n_i \chi_i$$

n_i étant le nombre de particules d'énergie $-\chi_i$. Si E_{p_i} est l'énergie de l'état de nombre quantique p_i , E_F l'énergie du niveau détruit dans le champ F , on a :

$$(9.4) \quad dn_i = \frac{N_0 g_i W(\beta) d\beta e^{\beta\chi_i}}{\sum_i \int_0^{\beta_i} g_i W(\beta) d\beta e^{\beta\chi_i}}$$

et l'équation (9.3) devient

$$(9.5) \quad E = \frac{3}{2} N(1+x) kT - N(1-x) \frac{\sum_i \int g_i W(\beta) d\beta e^{\beta\chi_i} (E_i - E_F)}{\sum_i \int g_i W(\beta) d\beta e^{\beta\chi_i}}.$$

Nous poserons de façon abrégée :

$$(9.6) \quad \bar{\chi} = \frac{\sum_i \int g_i (E_i - E_F) W(\beta) d\beta e^{\beta\chi_i}}{\sum_i \int g_i W(\beta) d\beta e^{\beta\chi_i}}$$

et de même :

$$(9.7) \quad \bar{\chi}^2 = \frac{\sum_i \int g_i (E_i - E_F)^2 W(\beta) d\beta e^{\beta\chi_i}}{\sum_i \int g_i W(\beta) d\beta e^{\beta\chi_i}}.$$

Afin de pouvoir effectuer les dérivations par rapport à x , V et T dans $\bar{\chi}$, nous explicitons la fonction $W(\beta)$ en mettant en évidence comme variable le champ électrique F . On écrit alors :

$$(9.8) \quad \bar{\chi} = \frac{\sum_i \int_0^{F_i} g_i (E_i - E_F) \frac{3}{2} (2,61 \cdot e)^{\frac{3}{2}} \frac{Nx}{V} F^{-\frac{5}{2}} dF e^{-F^{-\frac{3}{2}}} (2,61 \cdot e)^{\frac{3}{2}} \frac{Nx}{V} e^{\beta(E_i - E_F)}}{\sum_i \int_0^F g_i \frac{3}{2} (2,61 \cdot e)^{\frac{3}{2}} \frac{Nx}{V} F^{-\frac{5}{2}} dF e^{\beta(E_i - E_F)}}.$$

Nous posons :

$$(9.9) \quad E = \chi N (1 - x).$$

En posant également :

$$(9.10) \quad \bar{\chi} = \frac{S}{\Sigma}$$

$$(9.11) \quad \mathbf{T} = \sum \int_0^{\beta_i} g_i (E_i - E_F) d\left(\beta^{-\frac{3}{2}} e^{-\beta^{-\frac{3}{2}}}\right) e^{\mathcal{J}(E_i - E_F)}$$

$$(9.12) \quad \Theta = \sum \int_0^{\beta_i} g_i d\left(\beta^{-\frac{3}{2}} e^{-\beta^{-\frac{3}{2}}}\right) e^{\mathcal{J}(E_i - E_F)},$$

on obtient:

$$(9.13) \quad \frac{1}{\mathfrak{E}} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} = -\frac{dx}{1-x} + \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial x}.$$

On a:

$$(9.14) \quad \frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{\mathbf{T}}{x} \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\mathbf{T}}{V}$$

$$(9.15) \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial x} = -\frac{\Theta}{x} \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial V} = \frac{\Theta}{V} \quad \frac{V \partial \Sigma}{\Sigma \partial V} = \frac{\Theta}{\Sigma}.$$

On obtient donc

$$(9.16) \quad \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} = -N \bar{\chi} + \frac{\mathfrak{E}}{x} \left(\frac{\Theta}{\Sigma} - \frac{\mathbf{T}}{S} \right).$$

On a de même:

$$(9.17) \quad \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial V} = \frac{\mathfrak{E}}{V} \left(\frac{\mathbf{T}}{S} - \frac{\Theta}{\Sigma} \right) \quad \frac{1}{P} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial V} = \frac{1-x}{1+x} \frac{\bar{\chi}}{kT} \left(\frac{\mathbf{T}}{S} - \frac{\Theta}{\Sigma} \right).$$

On a enfin:

$$(9.18) \quad \frac{1}{\bar{\chi}} \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial T} = -\frac{1}{kT^2} \frac{\bar{\chi}^2}{\bar{\chi}} + \frac{1}{kT^2} \bar{\chi}$$

ou

$$(9.19) \quad \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial T} = -\frac{1}{kT^2} (\bar{\chi}^2 - \bar{\chi}^2).$$

Différentions (9.5), (9.2) et l'équation d'équilibre (2.7). On obtient ainsi le système d'équations différentielles:

$$(9.20) \quad dE = N(1+x) \frac{3}{2} kT \frac{dT}{T} + N \cdot \frac{3}{2} kT dx - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} dx - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial V} dV - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial T} dT$$

$$(9.21) \quad \frac{dP}{P} = \frac{dx}{1+x} + \frac{dT}{T} - \frac{dV}{V}$$

$$(9.22) \quad -\frac{dV}{V} + \frac{2 dx}{x} + \frac{dx}{1-x} = \frac{3}{2} \frac{dT}{T} - \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial x} dx - \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial T} dT - \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial V} dV$$

auquel il faut adjoindre (9.1) qui permet d'éliminer dE . On obtient alors le système:

$$(9.23) \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial V} - P \right) dV = \left(\frac{3}{2} \frac{PV}{T} - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial T} \right) dT + \left(\frac{3}{2} \frac{PV}{1+x} - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} \right) dx$$

$$(9.24) \quad \frac{dP}{P} = \frac{dx}{1+x} + \frac{dT}{T} - \frac{dV}{V}$$

$$(9.25) \quad \left(-\frac{1}{V} + \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial V} \right) dV + dx \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial x} \right) = \frac{dT}{T} \left(\frac{3}{2} - \frac{T \partial \Sigma}{\Sigma \partial T} \right).$$

On tire dV de l'équation (9.24) et on obtient:

$$(9.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial V} - P \right) V \frac{dP}{P} = dT \left(\frac{3}{2} \frac{PV}{T} - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial T} - \frac{V}{T} \left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial V} - P \right) \right) + \\ + dx \left(\frac{3}{2} \frac{PV}{1+x} - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} \left(\frac{V}{1+x} \frac{\partial E}{\partial V} - P \right) \right) \end{array} \right.$$

$$(9.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\left(-\frac{1}{V} + \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial V} \right) V \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} \left(\frac{3}{2} - \frac{T \partial \Sigma}{\Sigma \partial T} - V \left(-\frac{1}{V} + \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial V} \right) \right) - \\ - dx \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial x} + V \left(-\frac{1}{V} + \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial V} \right) \frac{1}{1+x} \right). \end{array} \right.$$

On élimine maintenant dx entre ces deux équations. Groupons auparavant les termes identiques

$$(9.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial V} - P \right) V \frac{dP}{P} = dT \left(\frac{5}{2} \frac{PV}{T} - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial T} - \frac{V}{T} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial V} \right) + \\ + dx \left(\frac{5}{2} \frac{PV}{1+x} - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} - \frac{V}{1+x} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial V} \right) \end{array} \right.$$

$$(9.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\left(-\frac{1}{V} + \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial V} \right) V \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} \left(\frac{5}{2} - \frac{V \partial \Sigma}{\Sigma \partial V} - \frac{T \partial \Sigma}{\Sigma \partial T} \right) - \\ - dx \left(\frac{2}{x(1-x^2)} + \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial x} + \frac{V}{1+x} \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial V} \right). \end{array} \right.$$

Par élimination de dx on obtient:

$$(9.30) \quad \frac{d \log T}{d \log P} = \frac{V \left[- \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V} - P \right) \left(\frac{2}{x(1-x^2)} + \frac{1 \partial \Sigma}{\Sigma \partial x} + \frac{V}{1+x} \frac{1 \partial \Sigma}{\Sigma \partial V} \right) + \left(\frac{1}{V} \frac{[1 \partial \Sigma]}{\Sigma \partial V} \right) \left(\frac{5 PV}{2(1+x)} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} - \frac{V}{1+x} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V} \right) \right]}{\left(\frac{5}{2} \frac{V \partial \Sigma}{\Sigma \partial V} - \frac{T \partial \Sigma}{\Sigma \partial T} \right) \left(\frac{5 PV}{2(1+x)} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} + \frac{V}{1+x} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V} \right) + \left(\frac{5 PV}{2} - T \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} - V \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V} \right) \left(\frac{2}{x(1-x^2)} + \frac{1 \partial \Sigma}{\Sigma \partial x} + \frac{V}{1+x} \frac{1 \partial \Sigma}{\Sigma \partial V} \right)}$$

En divisant haut et bas par $PV/x(1-x^2)$, on obtient l'expression suivante:

$$(9.31) \quad \frac{d \log T}{d \log P} = \frac{\left(1 - \frac{1 \partial \mathcal{E}}{P \partial V} \right) \left(2 + x(1-x^2) \frac{1 \partial \Sigma}{\Sigma \partial x} + x(1-x) \frac{V \partial \Sigma}{\Sigma \partial V} \right) + \left(1 - \frac{V \partial \Sigma}{\Sigma \partial V} \right) x(1-x) \left(\frac{5}{2} \frac{1+x \partial \mathcal{E}}{PV} - \frac{1 \partial \mathcal{E}}{P \partial V} \right)}{\left(2 + x(1-x) \frac{V \partial \Sigma}{\Sigma \partial V} + x(1-x^2) \frac{1 \partial \Sigma}{\Sigma \partial x} \right) \left(\frac{5}{2} \frac{T \partial \mathcal{E}}{PV \partial T} - \frac{1 \partial \mathcal{E}}{P \partial V} \right) + x(1-x) \left(\frac{5}{2} \frac{V \partial \Sigma}{\Sigma \partial V} - \frac{T \partial \Sigma}{\Sigma \partial T} \right) \left(\frac{5}{2} \frac{1+x \partial \mathcal{E}}{PV} - \frac{1 \partial \mathcal{E}}{P \partial V} \right)}$$

à l'aide des notations (9.9) et suivantes on obtient:

$$(9.32) \quad \frac{d \log T}{d \log P} = \frac{\left(1 - \frac{1-x}{1+x} \frac{\bar{\lambda}}{kT} \left(\frac{T}{S} - \frac{\Theta}{\Sigma} \right) \right) \left(2 - (1-x^2) \frac{\Theta}{\Sigma} + x(1-x) \frac{\Theta}{\Sigma} \right) + \left(1 - \frac{\Theta}{\Sigma} \right) \left(1-x \right) x \left(\frac{5}{2} + \frac{\bar{\lambda}}{kT} - \frac{\bar{\lambda}}{kT} x \frac{1-x}{1+x} \frac{\Theta}{\Sigma} - \frac{T'}{S} \right)}{\left(2 + x(1-x) \frac{\Theta}{\Sigma} - (1-x^2) \frac{\Theta}{\Sigma} \right) \left(\frac{5}{2} + \frac{1-x}{1+x} \frac{\bar{\lambda}}{kT} \left(\frac{T'}{S} - \frac{\Theta}{\Sigma} \right) - \frac{1-x \bar{\lambda}^2 - \bar{\lambda}^2}{1+x(kT^2)} \right) + x(1-x) \left(\frac{5}{2} - \frac{\Theta \bar{\lambda}}{\Sigma kT} \right) \left(\frac{5}{2} + \frac{\bar{\lambda}}{kT} - \frac{\bar{\lambda}}{kT} x \frac{1-x}{1+x} \frac{\Theta}{\Sigma} - \frac{T'}{S} \right)}$$

Après de petites réductions, on obtient :

$$(9.33) \quad \frac{d \log T}{d \log P} = \frac{\left(1 - \frac{1-x}{1+x} \frac{\bar{\chi}}{kT} \left(\frac{\Theta}{S} - \frac{\Theta}{\Sigma}\right)\right) \left(2 - (1-x) \frac{\Theta}{\Sigma}\right) + \left(1 - \frac{\Theta}{\Sigma}\right) x(1-x) \left(\frac{5}{2} + \frac{\bar{\chi}}{kT} - \frac{\bar{\chi}}{kT} x(1+x) \frac{\Theta}{\Sigma} - \frac{\Theta}{S}\right)}{\left(\frac{5}{2} + \frac{1-x}{1+x} \frac{\bar{\chi}}{kT} \left(\frac{\Theta}{\Sigma} - \frac{\Theta}{S}\right) - \frac{1-x}{1+x} \frac{\bar{\chi}^2}{(kT)^2}\right) \left(2 - (1-x) \frac{\Theta}{\Sigma}\right) + x(1-x) \left(\frac{5}{2} + \frac{\bar{\chi}}{kT} - \frac{\Theta}{\Sigma}\right) \left(\frac{5}{2} + \frac{\bar{\chi}}{kT} - \frac{\bar{\chi}}{kT} x(1+x) \frac{\Theta}{\Sigma} - \frac{\Theta}{S}\right)}$$

ou, en cherchant à se rapprocher de la forme habituelle

$$(9.34) \quad \frac{d \log T}{d \log P} = \frac{2 + x(1-x) \left(\frac{5}{2} + \frac{\bar{\chi}}{kT}\right) \left(1 - \frac{\Theta}{\Sigma}\right) + (1-x) \frac{\bar{\chi}}{kT} \left(\frac{\Theta}{\Sigma} - \frac{\Theta}{S}\right)}{5 + x(1-x) \left(\frac{5}{2} + \frac{\bar{\chi}}{kT}\right) \left(\frac{5}{2} + \frac{\bar{\chi}}{kT} - \frac{\Theta}{\Sigma}\right) + \left(\frac{\Theta}{\Sigma} - \frac{\Theta}{S}\right) \frac{\bar{\chi}}{kT} \frac{1-x}{kT} \left[2 - (1-x) \left(\frac{5}{2} + \frac{\bar{\chi}}{kT}\right)\right] + \frac{\bar{\chi}^2 - \bar{\chi}^2}{(kT)^2} \frac{1-x}{1+x} \left[(1-x) \frac{\Theta}{\Sigma} - 2\right]}$$

Pour une dilution infinie, $\Theta \rightarrow 0$, $\mathbf{T} \rightarrow 0$, $(\bar{\chi}^2 - \bar{\chi}^2) \rightarrow 0$ et on retrouve l'expression classique donnée par UNSÖLD (50) :

$$(9.35) \quad \frac{d \log T}{d \log P} = \frac{2 + x(1-x) \left(\frac{5}{2} + \frac{\bar{\chi}}{kT}\right)}{5 + x(1-x) \left(\frac{5}{2} + \frac{\bar{\chi}}{kT}\right)^2}.$$

On a calculé en fonction de N_1 et T , $\bar{\chi}$, Θ , \mathbf{T} et $\bar{\chi}^2$. On obtient ainsi finalement le tableau de $d \log T / d \log P$ en fonction de P et T (Voir l'appendice p. 98).

C. Coefficient d'absorption.

10. Méthode de calcul. Représentons l'énergie de l'électron en nous servant de la variable parabolique η . Pour un certain état initial en l'absence de champ, l'énergie potentielle a la forme représentée sur la figure 4, p. 53. Pour produire l'ionisation, il faut effectivement une énergie supérieure à ε .

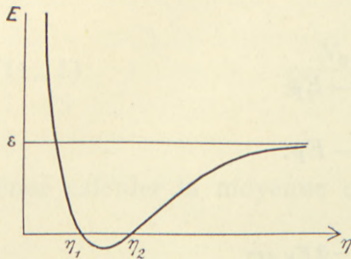


Fig. 4. Energie de l'électron en l'absence de champ électrique en fonction de la variable parabolique η .

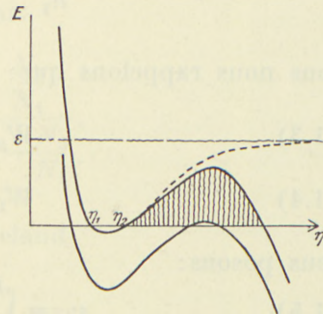


Fig. 5. Energie de l'électron en présence d'un champ électrique en fonction de la variable parabolique η .

Dans le cas où il y a un champ (fig. 5, p. 53) l'électron a à franchir la barrière de potentiel hachurée et, en toute rigueur, le potentiel d'ionisation est égal à la hauteur de la barrière de potentiel, hauteur inférieure à ε . Nous supposons que le champ est assez faible pour que les fonctions d'onde diffèrent de quantités négligeables des fonctions d'onde en l'absence de champ, et par conséquent la force de l'oscillateur est la même qu'en l'absence de champ. Mais en raison de l'abaissement de la barrière de potentiel, nous supposons que l'ionisation se produit pour une énergie plus faible et par conséquent que l'atome a un spectre continu s'étendant plus loin dans le rouge qu'en l'absence de champ. Cette simplification est légitime puisque nous utilisons la première approximation pour décrire l'atome perturbé par le champ, et bien entendu elle ne peut s'appliquer qu'à l'hydrogène qui seul présente l'effet Stark linéaire.

11. Calcul du coefficient d'absorption. Le coefficient d'absorption dans le spectre continu d'un atome dans l'état p est:

$$(11.1) \quad \kappa_\nu = \frac{1}{p^2} \frac{64 \pi^4}{3 \sqrt{3}} \frac{m e^{10}}{c h^6} \frac{1}{p^3 \nu^3}.$$

Nous supposons ici le facteur de Gaunt égal à l'unité. Nous nous reportons au nombre d'atomes dans l'état fondamental:

$$(11.2) \quad \frac{dn_p}{n_1} = \frac{p^2 W(F) e^{\vartheta W_p} dF}{\int_0^{F_1} W(F) e^{\vartheta W_1} dF}.$$

Nous nous rappelons que:

$$(11.3) \quad W_p = E_p - E_F$$

$$(11.4) \quad W_1 = E_1 - E_F.$$

Nous posons:

$$(11.5) \quad \gamma_p = \int_0^{F_p} W(F) e^{-\vartheta E_F} dF.$$

Nous posons comme UNSÖLD (50) $\vartheta E_p = u_p$. On a alors la contribution des atomes dans l'état p en sommant pour tous les niveaux qui sont susceptibles d'absorber la fréquence ν_1 , soit de F_ν , à F_p , F_ν pouvant être nul si $h\nu > E_p$. On a donc:

$$(11.6) \quad \kappa_\nu = \frac{1}{H} \frac{64 \pi^4}{3 \sqrt{3}} \frac{m e^{10}}{c h^3} \frac{1}{k^3 T^3} \frac{1}{\gamma_1} \frac{e^{-u_1}}{u^3} \frac{1}{p^3} \int_{F_\nu}^{F_p} W(F) e^{-u_F} dF.$$

On trouve de même pour la contribution des électrons libres:

$$(11.7) \quad \kappa_\nu = \frac{1}{H} \frac{64 \pi^4}{3 \sqrt{3}} \frac{m e^{10}}{c h_3} \frac{1}{k^3 T^3} \frac{1}{\gamma_1} \frac{e^{-u_1}}{u^3} \frac{1}{2 u_1},$$

d'où pour le coefficient d'absorption:

$$(11.8) \quad \kappa_\nu = \frac{1}{H} \frac{64 \pi^4}{3 \sqrt{3}} \frac{m e^{10}}{c h^3} \frac{1}{k^3 T^3} \frac{1}{\gamma_1} \frac{e^{-u_1}}{u^3} \left\{ \frac{1}{2 u_1} + \sum_p \frac{e^{u_p}}{p^3} \int_{F_\nu}^{F_p} W(F) e^{-u_F} dF \right\}.$$

Le coefficient d'absorption par gramme de matière s'obtient en multipliant (11.8) par la concentration en atomes neutres par gramme d'hydrogène. En vertu de l'équation (2.7) que nous écrivons

$$(11.9) \quad \frac{N_e N_1}{N_0} = 2 \frac{(2 \pi m k T)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \frac{e^{-\vartheta E_1}}{\sum 2 p^2 \gamma_p e^{-\vartheta E_p}}$$

et de

$$(11.10) \quad N_e = N_1,$$

on obtient N_1 en fonction de N_0 et T . Nous avons donc à multiplier le coefficient obtenu (11,8) par :

$$(11.11) \quad \frac{N_0}{N_1 + N_0} = \frac{\frac{N_0}{N_1}}{1 + \frac{N_0}{N_1}}.$$

Pour calculer la moyenne de Rosseland

$$(11.12) \quad \frac{1}{\bar{\kappa}} = \frac{15}{4 \pi^3} \int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu} \frac{u^4 e^{-u} du}{(1 - e^{-u})^3}.$$

on a à faire intervenir l'intégrale :

$$(11.13) \quad \int_0^\infty \frac{u^7 e^{-u} du}{(1 - e^{-u})^3 \left(\frac{1}{2 u_1} + \sum_p \frac{e^{u_p}}{p^3} \int_{F_p}^{F_p} W(F) e^{-u_F} dF \right)}.$$

En utilisant la notation (11.5), on peut écrire :

$$(11.14) \quad \int_0^\infty \frac{u^7 e^{-u} du}{(1 - e^{-u})^3 \left(\frac{1}{2 u_1} + \sum_p \frac{e^{u_p}}{p^3} (\gamma_p - \gamma_\nu) \right)}$$

et l'on a :

$$(11.15) \quad \begin{cases} h\nu < E_p & \gamma_\nu = \int_0^{(W_p = h\nu)} W(F) e^{-u_F} dF \\ h\nu > E_p & \gamma_\nu = 0; \end{cases}$$

pour les très faibles densités, le coefficient d'absorption se réduit à sa valeur usuelle, et pour les grandes densités au coefficient d'absorption des électrons libres en présence des protons.

La diffusion de J. J. Thomson pour de l'hydrogène pur donne un coefficient d'absorption

$$(11.16) \quad \kappa_e = 0,38$$

qui est petit devant le coefficient d'absorption de l'hydrogène en raison des grandes densités considérées, mais ceci n'est vrai que pour les naines blanches.

12. Influence de l'élargissement des raies. Sous l'influence de l'effet Stark linéaire, les raies s'élargissent au point de se recouvrir complètement. Le coefficient d'absorption se raccorde alors de façon continue au fond continu d'au-delà de la discontinuité de Balmer. Nous verrons dans le chapitre III comment calculer alors le coefficient moyen d'absorption. Nous allons seulement comparer ici les deux effets: ionisation de pression et recouvrement des raies.

a) Recouvrement des raies. Le coefficient de $1/\nu^3$ dans le coefficient d'absorption est pris constant jusqu'à une fréquence définie par le nombre quantique m de la dernière raie visible (INGLIS et TELLER (19)):

$$(12.1) \quad m = \frac{[3,101]}{N_1^{2715}}.$$

b) Ionisation de pression. Le coefficient de $1/\nu^3$ est pris constant jusqu'à une fréquence définie par le nombre quantique n de la première raie ionisée par effet Stark moléculaire:

$$(12.2) \quad n = \frac{[3,808] \tau^{\frac{1}{4}}}{N_1^{1/6}}$$

qui est pratiquement toujours plus grand que m , l'égalité ne se produisant que pour $\log N_1 = 19,2$ $n = 3,5$, mais alors la formule simplifiée (12.1) d'Inglis et Teller, obtenue pour des nombres quantiques élevés, n'est certainement plus valable (voir tableau I, p. 34).

III. Un modèle d'atmosphère pour les naines blanches.

A. Introduction.

1. Nous avons étudié dans la première partie le triage des éléments dans un champ de gravitation. Dans le champ de pesanteur extrêmement intense des naines blanches la séparation de l'hydrogène est quasi-totale. Il semble donc possible de constituer un modèle de naine blanche d'une couche d'hydrogène pur entourant un noyau d'éléments lourds (34). Un tel modèle semble bien expliquer le débit d'énergie des naines blanches et paraît s'accorder avec les traits principaux qui se manifestent dans leur spectre (41), si bien que la théorie de la structure interne doit rester à la base d'une théorie du spectre.

2. Rappelons ce résultat essentiel de l'observation des naines blanches que toutes sauf deux — Van Maanen 2 et Sirius B — n'ont pas de raies métalliques dans leur spectre. Le spectre très difficile à prendre de Sirius B ne m'est pas connu, mais Kuiper a publié (22) des enregistrements du spectre de Van Maanen 2. On ne peut manquer d'être frappé par la largeur considérable des raies *H* et *K* de *Ca* II, due sans doute à l'élargissement par chocs, et en même temps par l'absence des raies de l'hydrogène. Cette absence de raies métalliques dans le spectre des naines blanches est manifestement une conséquence du triage des éléments et à nos yeux constitue une preuve suffisante de ce phénomène.

3. Pour une même profondeur optique, la densité d'une atmosphère est, très approximativement proportionnelle à l'intensité du champ de pesanteur, si bien que l'on atteint, très près de la surface, des densités déjà élevées. A ces densités tous les effets de pression deviennent considérables. Nous avons mentionné plus haut la grande largeur des raies métalliques dans la seule naine blanche où on les observe. L'élargissement des raies de l'hydrogène est bien connu et semble relié à l'effet Stark moléculaire.

4. VERWEJ (51) a fait la théorie de l'élargissement des raies de l'hydrogène par effet Stark moléculaire, en s'appuyant sur la théorie de HOLTSMARK (18) et il semble bien, comme l'a montré KUIPER (22), qu'elle n'est valable que pour les ailes des raies. Notons que Verweij n'a pas tenu compte de l'élargissement par choc des raies du réseau Stark. Il n'est pas impossible que l'introduction de l'élargissement par chocs modifie assez fortement au voisinage du centre les profils calculés par Verweij.

5. Mentionnons les idées de BLACKETT (5) sur le champ magnétique des corps en rotation et leurs conséquences pour la théorie du spectre des naines blanches. Il semble bien (41) qu'il n'est pas nécessaire d'introduire de champ magnétique intense pour expliquer le spectre des naines blanches. Nous considérons ce résultat comme n'étant pas dirigé contre la théorie de Blackett mais comme une preuve supplémentaire (39) d'une origine distincte pour les naines blanches et pour les étoiles de la série principale.

6. Il ressort des critiques de CHANDRASEKHAR (8) et de KOURGANOFF (20) que non seulement la moyenne de Rosseland n'est pas adaptée au traitement des problèmes d'atmosphère, mais qu'il n'existe aucune moyenne permettant de traiter rigoureusement les problèmes d'atmosphères. C'est seulement en raison de la complication des méthodes à employer pour le calcul d'une atmosphère que nous nous sommes trouvés réduits à employer la moyenne de Rosseland. L'expérience des autres étoiles montrant qu'elle donnait à bien des égards des résultats satisfaisants, il a semblé que pour le premier calcul d'atmosphère de naine blanche on ne pouvait exiger plus.

B. Le modèle d'atmosphère.

7. Stabilité de l'ion négatif hydrogène. Deux méthodes différentes donnent des résultats cohérents pour la stabilité de l'ion négatif hydrogène à l'égard des collisions. Il est ainsi possible de déterminer le « volume » de l'ion négatif à introduire dans la théorie des volumes exclus ou de tout autre analogue. On peut

déterminer les conditions d'utilisation des formules usuelles et des tables déjà connues et leurs limites d'application aux atmosphères de naines blanches.

Nous devons en effet nous attendre à une très grande fragilité de H^- en raison à la fois de son gros volume et de son bas potentiel d'ionisation. Nous pouvons décrire la destruction de H^- au cours d'une collision soit comme une ionisation par choc, soit comme un effet Stark moléculaire. Si l'effet Stark, dans le cas des systèmes à plusieurs électrons ne produit pas d'effet du premier ordre, il est néanmoins capable d'amener la destruction des effets stationnaires par abaissement de la barrière de potentiel. Il s'agit là de deux phénomènes indépendants, l'un faisant intervenir la symétrie des fonctions d'onde, l'autre la transparence d'une barrière de potentiel. On peut alors faire soit un calcul de section de choc par la méthode de J. J. Thomson ou tout autre plus éprouvée, soit un calcul d'effet Stark. Les deux résultats concordent. En effet, la première méthode nous montre que H^- a la même fragilité dans une collision que l'état $n \cong 5$ de l'hydrogène neutre. L'autre également très approchée est basée sur l'idée que l'ionisation se produit lorsque la variation de potentiel électrique à travers le domaine de l'atome est du même ordre de grandeur que le potentiel d'ionisation. Dans ce cas, la difficulté est de choisir le rayon de l'atome, ce qui est particulièrement délicat, puisque dans H^- la densité électronique ($\psi\psi^*$) varie très lentement. Un calcul précis est difficile à mener en raison de la difficulté de transposer la méthode de champ self-consistent de Hartree en coordonnées paraboliques. Une évaluation grossière légitime l'assimilation de la fragilité de l'ion négatif hydrogène à celle de l'état $n \cong 5$ de l'hydrogène neutre.

8. Un tel calcul approché n'a de sens que parce qu'il permet d'évaluer grossièrement le maximum de concentration de l'ion négatif et de déterminer les conditions dans lesquelles l'absorption due à l'ion négatif est négligeable comparée à celle de l'hydrogène. Le principe du calcul est le suivant: nous modifions légèrement l'équation de Saha pour l'ion négatif afin de tenir compte de l'ionisation de pression de l'ion négatif. Nous avons les deux équations d'équilibre pour H^+ et H^- :

$$(8.1) \quad \frac{N_e N_1}{N_0} = \frac{(2 \pi m k T)^{\frac{3}{2}}}{h^3} e^{-\vartheta E_0}$$

$$(8.2) \quad \frac{N_e N_0}{N^-} = 2 \frac{(2 \pi m k T)^{\frac{3}{2}}}{h^3} 2 e^{-\vartheta J} e^{\alpha N_0};$$

avec la valeur de α obtenue au § 7:

$$(8.3) \quad \log_{10} \alpha = \overline{19,65}.$$

Nous devons ajouter à ces deux équations la relation:

$$(8.4) \quad N_1 = N_e + N^-$$

qui exprime que les électrons ne proviennent que de l'hydrogène. Si l'on prend N_1 comme paramètre, on trouve que, pour une température donnée, le nombre d'ions négatifs N^- passe par un maximum pour

$$(8.5) \quad \alpha N_1 = 3 + \varepsilon,$$

ε étant une quantité très petite dont la première approximation est:

$$(8.6) \quad \varepsilon = \frac{18 e^{-3}}{\alpha^2 g + 6 e^{-3}}$$

où g représente

$$(8.7) \quad g = 2 \frac{(2 \pi m k T)^3}{h^6} e^{-\vartheta (E_0 + J)}.$$

En posant $\theta = \frac{5040}{T}$ on obtient la valeur approximative suivante pour N_{\max}^- :

$$(8.8) \quad N_{\max}^- = \frac{[24,113]}{T^3} 10^{14,31 \theta}.$$

On peut alors aisément calculer le rapport de l'absorption due à l'ion négatif à celle due à l'hydrogène lorsque N^- est maximum. On trouve les résultats contenus dans le tableau I.

Ce rapport est très grand, mais il correspond à des valeurs si élevées de la pression qu'elles ne se rencontrent pas dans l'atmosphère des naines blanches connues. Nous voyons qu'il

Tableau I.

θ	$\log (\chi_{H^-}/\chi_H)_{\max}$
0.3	3.90
0.4	3.65
0.5	3.59
0.6	4.13
0.7	4.53

faut reprendre les tables de STRÖMGREN (48) pour le coefficient d'absorption, mais en supposant l'absorption due à l'hydrogène pur et en tenant compte à la fois de l'ion négatif et de l'hydrogène neutre.

9. Absorption par l'hydrogène moléculaire. Lorsque la densité croît et devient un peu élevée, la probabilité qu'une absorption ait lieu par collision triple d'un photon et de deux atomes devient appréciable.

CRITCHFIELD (13) donne une évaluation grossière de la section de choc:

$$(9.1) \quad \sigma = 10^{-17} (4 \cdot 10^{-24} n)^2,$$

le coefficient d'absorption par gramme étant

$$(9.2) \quad \kappa = \frac{n \sigma}{\rho},$$

n étant le nombre d'atomes neutres par gramme. Dans les conditions où n devient notable, n est pratiquement égal au nombre d'atomes d'hydrogène présent et on a:

$$(9.3) \quad \kappa_{\text{coll. triples}} = 16 \cdot 10^{-65} \frac{n_H^3}{\rho}.$$

On en déduit la relation suivante qui donne $p_e(\theta)$ le long de la courbe

$$(9.4) \quad \kappa_{\text{coll. triples}} = \bar{\kappa}_H,$$

$$(9.5) \quad p_e \theta \frac{1-x}{x} = \bar{\chi}_H [7,85],$$

d'où le tableau II.

Tableau II.

θ	$\log p_e$
0.4	8.7
0.5	7.2
0.6	4.68
0.7	4.25

On trouvera sur la figure 6, p. 63, différentes courbes, montrant dans le diagramme θ , $\log p_e$ les régions de différents coefficients d'absorption. Une courbe limite indique pour quelle valeur de p_e la pression totale

$$(9.6) \quad P = \frac{p_e \left(1 + \frac{2 N_{H^+}}{N_H} \right)}{\frac{N_{H^+}}{N_H} - \frac{N_{H^-}}{N_H}}$$

devient infinie (car $N_{H^+} = N_{H^-}$ lorsque tous les électrons ont été absorbés par l'ion négatif). Bien entendu, il n'est pas question de dresser des tables si loin, l'ionisation de pression (§ 8) intervenant bien avant.

10. Formation des molécules⁽¹⁾. L'énergie de formation de la molécule H^2 est 4.46 électron-volts. Elle peut donc certainement se former assez facilement quand la pression augmente. En appliquant la relation de Saha

$$(10.1) \quad \frac{[H]^2}{[H_2]} = \frac{2 (2 \pi H k T)^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}} h^3} e^{-10,26 \theta}$$

et en tenant compte de la relation

$$(10.2) \quad \log \frac{[H^+]}{[H]} = -0,48 - 13,56 \cdot \theta + \frac{5}{2} \log T - \log p_e,$$

on obtient aisément $\log \frac{[H_2]}{[H]}$ en fonction de la pression électronique et de la température:

(1) M. R. Wildt a bien voulu faire remarquer à l'auteur que ces résultats doivent être sensiblement modifiés, en raison de la valeur élevée de la somme d'états de la molécule d'hydrogène. Le nombre de molécules d'hydrogène n'est sans doute pas négligeable, mais leur effet ne peut pas encore être calculé en raison de notre ignorance des coefficients d'absorption. (Note ajoutée à la correction des épreuves).

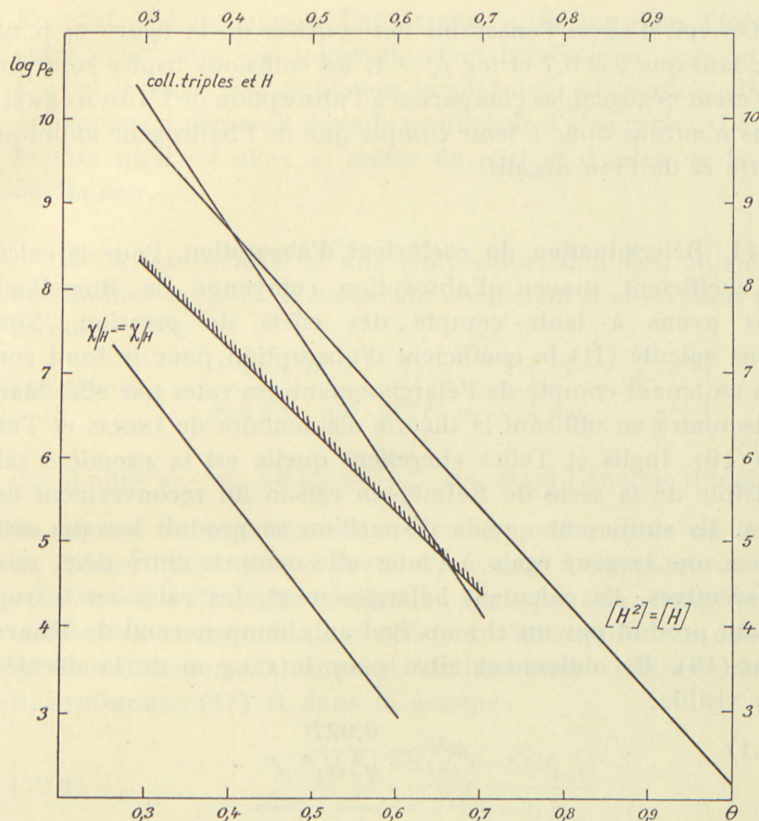


Fig. 6. Domaine d'application des différentes approximations relatives au coefficient d'absorption. On remarquera que dans le domaine des températures étudiées les collisions triples ne contribuent pas de façon sensible à l'absorption.

$$(10.3) \quad \log \frac{[H_2]}{[H]} = -22,31 + 18,0 \theta + 5 \log \theta + 2 \log p_e;$$

ce logarithme est égal à zéro (nombre égal) pour des valeurs de θ et de p_e données dans le tableau III.

Tableau III.

θ	$\log p_e$
0.3	9.77
0.4	8.55
0.5	7.41
0.6	6.31
1	2.15

On voit d'après l'ensemble des courbes de la figure 6, p. 63, que, tant que $\theta < 0,7$ et $\log p_e > 4$, les collisions triples sont pratiquement négligeables comparées à l'absorption de l'ion négatif. Nous n'aurons donc à tenir compte que de l'hydrogène atomique neutre et de l'ion négatif.

11. Détermination du coefficient d'absorption. Pour le calcul du coefficient moyen d'absorption (moyenne de Rosseland) nous avons à tenir compte des effets de pression. Nous avons calculé (II) le coefficient d'absorption pour le fond continu en tenant compte de l'élargissement des raies par effet Stark moléculaire en utilisant la théorie élémentaire de INGLIS et TELLER (19). Inglis et Teller cherchent quelle est la première raie invisible de la série de Balmer en raison du recouvrement des raies. Ils supposent que la disparition se produit lorsque cette raie a une largeur égale à l'intervalle compris entre deux raies consécutives. Ils calculent l'élargissement des raies en le supposant produit par un champ égal au champ normal de HOLTSMARK (18). Ils obtiennent ainsi pour le rang m de la dernière raie visible:

$$(11.1) \quad m^{7,5} = \frac{0,027}{a_0^3 N_1},$$

où a_0 est le rayon de Bohr de l'hydrogène et N_1 le nombre d'ions par cm^3 . En pratique, nous prendrons pour N_1 seulement le nombre de protons par cm^3 , l'élargissement dû aux électrons étant négligeable. Numériquement, la formule (11.1) donne:

$$(11.2) \quad m = \frac{[3,101]}{N_1^{2/15}}$$

et le tableau p. 34 donne les valeurs de N_1 correspondant aux 10 premières valeurs de m .

Les valeurs de N_1 sont de l'ordre de ce que l'on observe dans l'atmosphère des naines blanches.

Dans le domaine où les raies de Balmer se recouvrent, tout se passe comme si l'on avait un coefficient d'absorption continu inversement proportionnel au cube de la fréquence et prolongeant de façon continue le coefficient d'au-delà la limite de Balmer.

En effet, si l'on suppose l'absorption uniforme dans l'intervalle entre deux raies, cet intervalle étant inversement proportionnel à n^3 et la force de l'oscillateur inversement proportionnelle à n^3 également, n disparaît dans le coefficient d'absorption. Le calcul montre qu'il est alors le même de part et d'autre de la limite de Balmer.

12. A une densité et une température données, on substitue aux limites u_p pour le calcul du coefficient d'absorption par la formule

$$(12.1) \quad \kappa_H = \frac{1}{H} \frac{64 \pi^4 m_e e^{10}}{3 \sqrt{3} ch^3} \frac{1}{k^3 T^3} \frac{e^{-u_1}}{\gamma_1 u^3} \left\{ \frac{1}{2 u_1} + \frac{\sum e^{u_p}}{p^3} \right\},$$

des limites $u_p - u_m$ où $u_m = \frac{h \nu_m}{kT}$, $h \nu_m$ étant l'énergie d'ionisation du niveau correspondant à la dernière raie visible de la série de Balmer. Cela revient en quelque sorte à supposer une nouvelle valeur à l'énergie d'ionisation sans que cela change en quoi que ce soit la formule du coefficient d'absorption. Le calcul du coefficient moyen d'absorption fait intervenir l'intégrale $S(u)$ de B. STRÖMGREN (47) et dans la somme

$$(12.2) \quad \sum = \sum_i \frac{S(u_i) - S(u_{i+1})}{D(u_i, u_{i+1})}$$

les quantités $D(u_i, u_{i+1})$ gardent les mêmes valeurs, mais les limites u_i sont modifiées de quantités u_m . Calculons la modification qui est apportée à la somme (12.2) en supposant les u_m petits devant u_i . On a :

$$S(u) = \frac{15}{4 \pi^4} \int_0^u \frac{u^7 e^{2u}}{(e^u - 1)^3}$$

$$S(u + h) = S(u) + hS'(u)$$

et par conséquent

$$(12.3) \quad \Delta \sum = \sum_i \frac{h(S'(u_i) - S'(u_{i+1}))}{D(u_i, u_{i+1})}$$

avec $h = \frac{h \nu_m}{kT}$ et

Tableau IV ($\log \bar{\kappa}$)

Log P	4,6	4,8	5,0	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0	6,2	6,4
0,30	1,79	1,98	2,18	2,37	2,54	2,71	2,88	3,03	3,14	3,29
0,32	1,96	2,15	2,33	2,51	2,67	2,82	2,96	3,08	3,19	3,28
0,34	2,12	2,29	2,46	2,61	2,74	2,87	2,98	3,08	3,17	3,24
0,36	2,23	2,37	2,52	2,66	2,77	2,86	2,94	3,00	3,07	3,14
0,38	2,30	2,42	2,52	2,64	2,73	2,79	2,86	2,92	2,98	3,04
0,40	2,31	2,41	2,50	2,58	2,65	2,70	2,74	2,80	2,86	2,91
0,42	2,35	2,40	2,46	2,52	2,57	2,61	2,66	2,71	2,76
0,44	2,29	2,35	2,40	2,44	2,48	2,53	2,58	2,63
0,46	2,21	2,26	2,31	2,35	2,40	2,45	2,51
0,48	2,09	2,14	2,19	2,25	2,31	2,37
0,50	2,04	2,10	2,16	2,22
0,52
0,54
0,56
0,58
0,60

$$(12.4) \quad S'(u) = \frac{15}{4\pi^4} \frac{u^7 e^{2u}}{(e^u - 1)^3}.$$

La quantité u_m est égale à u_1/m^2 . m étant dans 40 Eridani B de l'ordre de 8 à 10, u_m est de l'ordre de $u_1/50$ à $u_1/100$. u_1 étant de l'ordre de 10, u_m est de l'ordre de 0,2 à 0,1. $S'(u)$ atteint son maximum au voisinage de $u = 7$ et ce maximum vaut 29,6.

Calculons effectivement la variation $\Delta\left(\frac{1}{\varkappa}\right)$ pour $\theta = 0,4$. On trouve

$$(12.5) \quad \Delta(\Sigma) = 0,12 \cdot 24 = 2,9,$$

alors que $\Sigma = 73,5$. L'erreur relative $\frac{\Delta\Sigma}{\Sigma} = 0,04$ est très petite et nous voyons que malgré le déplacement des limites d'absorption il est cependant encore légitime (38) de se servir des tables déjà existantes de la moyenne de Rosseland pour l'hydrogène pur.

Tableau IV (suite).

6,4	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4	7,6	7,8	8,0	8,2 Log P
3,29	3,40	3,50	3,58	3,67	3,75	3,83	3,90	3,98 0,30
3,28	3,37	3,45	3,52	3,60	3,67	3,73	3,80	3,86	3,94 0,32
3,24	3,31	3,38	3,45	3,52	3,58	3,64	3,70	3,76	3,82 0,34
3,14	3,22	3,28	3,35	3,42	3,49	3,55	3,62	3,68	3,74 0,36
3,04	3,10	3,15	3,21	3,28	3,35	3,42	3,49	3,57	3,63 0,38
2,91	2,96	3,01	3,07	3,13	3,20	3,27	3,35	3,43	3,50 0,40
2,76	2,82	2,89	2,95	3,01	3,07	3,13	3,20	3,28	3,36 0,42
2,63	2,69	2,75	2,82	2,88	2,95	3,02	3,10	3,18	3,26 0,44
2,51	2,57	2,63	2,69	2,77	2,84	2,92	2,99	3,07	3,15 0,46
2,37	2,44	2,50	2,59	2,65	2,73	2,80	2,88	2,96	3,04 0,48
2,22	2,29	2,36	2,44	2,52	2,60	2,69	2,77	2,85	2,94 0,50
.. 0,52
.. 0,54
.. 0,56
.. 0,58
.. 0,60

13. Le calcul du modèle d'atmosphère ne diffère pas dans ces conditions du calcul de BENGT STRÖMGREN (48) si ce n'est dans l'emploi du coefficient d'absorption pour l'hydrogène pur.

On emploie simultanément les formules suivantes:

équation d'équilibre hydrostatique:

$$(13.1) \quad \frac{dp}{dz} = -g\rho;$$

équation de transfert

$$(13.2) \quad d\tau = -\bar{\kappa}_0 dh;$$

équation standard reliant la profondeur optique et la température (approximation de Milne Eddington pour le corps gris)

$$(13.3) \quad T^4 = T_e^4 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \tau \right)$$

ou

$$(13.4) \quad T^4 = T_0^4 \left(1 + \frac{3}{2} \tau \right).$$

En éliminant dh on a ainsi à résoudre :

$$(13.5) \quad \frac{d\tau}{d \log p} = \frac{1}{g \log e} \bar{\kappa} p.$$

L'intégration est faite en utilisant la méthode indiquée par STRÖMGREN (48). Toutefois nous n'avons pas cru utile de faire un calcul aussi précis.

Nous avons calculé $\log \bar{\kappa}$ en fonction de θ et de $\log p$ (Tableau IV contenant partiellement les tables de STRÖMGREN) pour l'hydrogène pur.

Nous n'avons calculé jusqu'à présent que deux modèles d'atmosphères, correspondant respectivement aux conditions approximatives de 40 Eri B et de Van Maanen 2 (tableau VI). Nous avons pris :

$$\begin{array}{lll} \text{pour 40 Eridiani B} & \theta_0 = 0,45 & \log g = 7,69 \\ \text{pour Van Maanen 2} & \theta_0 = 0,50 & \log g = 10,00. \end{array}$$

Pour 40 Eridani B les valeurs de $\bar{\kappa}$ utilisées étaient déduites d'une table préliminaire et différaient légèrement de celles données dans le tableau IV.

14. Couche convective. Nous calculons à l'aide de la formule d'UNSÖLD (50) pour l'hydrogène pur :

$$(14.1) \quad \frac{d \log T}{d \log p} = \frac{2 + x(1-x) \left(\frac{5}{2} + u_1 \right)}{5 + x(1-x) \left(\frac{5}{2} + u_1 \right)^2}$$

la valeur de la compressibilité adiabatique. On trouve dans le tableau VI les valeurs de $(d \log T / d \log P)_{\text{ad}}$ et $(d \log T / d \log P)_{\text{rad}}$. La comparaison entre ces deux séries de valeurs permet de trouver la profondeur optique de la limite supérieure de la zone convective. On trouve

$$(14.2) \quad \text{Pour 40 Eridani B,} \quad \tau = 0,14$$

$$(14.3) \quad \text{Pour Van Maanen 2,} \quad \tau = 0,43.$$

Nous n'avons pas encore cherché à déterminer de limite inférieure de la zone convective.

Tableau V

τ	θ	$\log p$	$\log \bar{z}$	$\left(\frac{d \log T}{d \log P}\right)_{ad}$	$\left(\frac{d \log T}{d \log P}\right)_{rad}$	$\log N_1$
Modèle pour une étoile du type de 40 Eridani B						
0	0,45	3,4	1,57	0,092	0	15,10
0,0009	0,4498	3,6	1,69	0,089	0	15,26
0,0027	0,4495	3,8	1,80	0,085	0	15,41
0,0064	0,4489	4	1,89	0,083	0,005	15,55
0,0110	0,4482	4,2	1,96	0,083	0,014	15,66
0,0248	0,4458	4,4	2,04	0,085	0,025	15,79
0,0517	0,4412	4,6	2,11	0,087	0,040	15,93
0,1019	0,4344	4,8	2,19	0,090	0,065	16,09
0,2063	0,421	5,0	2,31	0,094	0,140	16,29
0,473	0,395	5,2	2,51	0,100	0,235	16,51
1,061	0,355	5,4	2,70	0,106	..	16,80
2,083	0,316	5,6	2,78	16,98
3,559	0,284	5,8
Modèle pour une étoile du type de Van Maanen 2						
..	0,50	5	1,85	0,11	0	15,71
0,007	0,50	5,2	1,89	0,13	0	15,82
0,0013	0,50	5,4	1,94	0,14	0	15,92
0,0023	0,50	5,6	1,99	0,15	0	16,02
0,0041	0,50	5,8	2,04	0,17	0	16,12
0,0072	0,50	6	2,10	0,19	0,011	16,23
0,013	0,4975	6,2	2,18	0,21	0,013	16,34
0,024	0,4955	6,4	2,25	0,22	0,018	16,45
0,044	0,4915	6,6	2,35	0,24	0,029	16,59
0,085	0,485	6,8	2,47	0,24	0,055	16,74
0,170	0,473	7	2,61	0,25	0,113	16,92
0,356	0,450	7,2	2,83	0,25	0,215	17,18
0,843	0,408	7,4	3,15	0,20	0,395	17,48
2,46	0,340	7,6	3,64	0,17	..	18,13

C. Répartition spectrale de l'énergie.

15. Le fond continu. Le calcul du fond continu ne présente pas de difficultés spéciales. La répartition spectrale de l'énergie à la surface est donnée par :

$$(15.1) \quad \frac{1}{2} \frac{F_\nu}{\pi} = \int_0^\infty B_\nu(\tau_\nu) K_2(\tau_\nu) d\tau_\nu$$

et l'on emploie une formule d'approximation (quadrature numérique à trois termes)

$$(15.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{F_\nu}{\pi} = 0,76689 B_\nu (\tau_\nu = 0,287) \\ \quad + 0,22652 B_\nu (\tau_\nu = 1,81436) \\ \quad + 0,006591 B_\nu (\tau_\nu = 5,385). \end{array} \right.$$

La profondeur optique est donnée par

$$(15.3) \quad d\tau_\nu = -\kappa'_\nu \varrho dx$$

à quoi l'on joint

$$(15.4) \quad dx = -\frac{dp}{g\varrho},$$

d'où

$$(15.5) \quad \tau_\nu = \frac{1}{g \log_{10} e} \int_0^p \kappa'_\nu(\tau, \theta) \frac{d \log_{10} p}{p}.$$

Ici, κ'_ν est le coefficient d'absorption réduit pour tenir compte de l'émission induite. En fait, κ'_ν est dans le cas qui nous occupe très peu différent de κ_ν et nous ne tiendrons pas compte de la différence.

Lorsque l'on atteint, pour une longueur d'onde donnée une région où les raies se recouvrent en raison de l'augmentation de pression, le coefficient d'absorption devient plus grand. B_ν possède en ce point une discontinuité de sa dérivée, ce qui ne gêne

Tableau VI.

Répartition de l'énergie dans le spectre continu d'une étoile du type de 40 Eridani B.

λ	$\log \frac{F_\nu}{F_{3000}}$	λ	$\log \frac{F_\nu}{F_{3000}}$
3000	0,0	3897	0,170
3200	0,022	3947	0,199
3400	0,034	3997	0,207
3600	0,047	4200	0,195
3647	0,049	4400	0,185
3747	0,052	4600	0,167
3797	0,064	4800	0,150
3847	0,117	5000	0,138

pas pour l'emploi de la formule d'intégration numérique à 3 termes de Gauss. Afin de tenir compte de la dispersion du prisme, les valeurs trouvées en utilisant les tables de $B(\nu, \theta)$ sont multipliées par un terme proportionnel à λ^2 . On obtient ainsi le tableau VI donnant le logarithme du flux, exprimé en unités arbitraires en fonction de la longueur d'onde.

16. La superposition des raies. La distance entre deux raies Stark dans la série de Balmer, séparées par un champ électrique d'intensité F_{cgs} , est:

$$(16.1) \quad \Delta\lambda_0 = 0,00256 F_{\text{cgs}} \left(\frac{n^2}{n^2 - 4} \right)^2$$

et la distance séparant les deux raies extrêmes est, mesurée en cette unité:

$$(16.2) \quad \Delta\lambda = [n(n-1) + 2] \Delta\lambda_0,$$

Par ailleurs, la théorie de RUDKJØBING (31) permet de calculer l'élargissement des raies dû aux collisions. La constante d'amorçage exprimée en unités de $2\pi\nu$ est:

$$(16.3) \quad \gamma = \frac{\sqrt{2} h^2 N_e}{\pi^{\frac{3}{2}} m^{\frac{3}{2}} \sqrt{kT}} \int_0^{\infty} \sum_l (2l+1) \sin^2(\nu_1 - \nu_2)_{l,E} e^{-E/kT} d\left(\frac{E}{kT}\right).$$

Afin de comparer cette expression avec la valeur $\Delta\lambda$ que nous venons de trouver, nous pouvons remplacer l'intégrale par l'unité. On a alors numériquement:

$$(16.4) \quad \gamma \cong 10^{-4,46} \frac{N_e}{\sqrt{T}}$$

On trouve alors que l'élargissement des raies par collision est plus important que l'effet Stark moléculaire, tant que

$$(16.6) \quad N_1 < [15,360] T^{\frac{3}{2}}.$$

Tant que cette inégalité est satisfaite (ce qui est d'ailleurs le cas de 40 Eridani B) l'hypothèse simplificatrice de Pannekoek que l'énergie de la raie est uniformément répartie sur toute sa largeur est une approximation satisfaisante.

Nous voyons, au seul énoncé de l'importance considérable de cet effet, que le calcul de VERWEJ (51) du profil des raies devrait être repris en tenant compte de l'amortissement par chocs. On devrait s'attendre à voir le profil des raies s'adoucir considérablement et sans doute verrait-on disparaître le ou les pics centraux que Verweij a obtenu pour les forts champs de pesanteur.

17. Méthode de calcul. Le calcul a été effectué d'après les calculs de PANNEKOEK (28). Pannekoek a étudié l'intensité des raies d'émission. Il ressort de son travail que le phénomène prépondérant est le phénomène de recouvrement des raies, le phénomène de dissolution étant beaucoup moins important.

a) Le coefficient d'absorption en un point situé à une distance $\Delta\lambda$ du centre de la raie est donné par:

$$(17.1) \quad [2,549] \left(\frac{n^2}{n_2 - 4} \right)^2 f \frac{1}{SF_0} \int_0^\infty \frac{W(\beta)}{\beta} d\beta$$

où S , qui donne l'étendue en ångströms du réseau de raies Stark est donné par

$$(17.2) \quad S = 0,00256 [n(n-1) + 2] \left(\frac{n^3}{n^2 - 4} \right)^2$$

avec

$$(17.3) \quad \Delta\lambda_0 = SF_0,$$

F_0 étant le champ moléculaire moyen.

Si $\Delta\lambda$ est la distance fixe au centre de la raie où l'on mesure l'intensité et $\Delta\lambda_0$ l'élargissement moyen, on a:

$$(17.4) \quad \beta = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_0},$$

$W(\beta) d\beta$ est ici la fonction de distribution de HOLTSMARK (18) telle qu'il en a été fait mention au chapitre II;

f est la force de l'oscillateur telle qu'elle est donnée par BETHE (12) et reproduite par UNSÖLD (50).

b) On calcule en un point situé à mi-distance de deux raies voisines la contribution de 2 raies (ou 4) élargies (1 ou 2 de chaque côté). On calcule ainsi le coefficient d'absorption par gramme d'hydrogène dans l'état quantique $n = 2$ en fonction du nombre N_1 de protons par cm^3 .

Pour chaque modèle d'atmosphère envisagé, on calcule le coefficient d'absorption k_ν par gramme de matière et l'on ajoute l_ν au coefficient k_ν , déjà trouvé pour le fond continu. Lorsque l'on atteint la région où l'effet de pression fait disparaître les raies dans le continu, on ne tient plus compte que du coefficient d'absorption k_ν du continu.

Le tableau VIII donne le coefficient d'absorption entre deux raies consécutives en fonction de $\log N_1$ par gramme d'hydrogène dans l'état $n = 2$.

On a calculé de cette manière l'intensité pour les longueurs d'onde 3862 3930 4036 pour 40 Eridani B et 3930 4036 4221 4601 pour Van Maanen 2 correspondant respectivement aux points situés à mi-distance des raies $\zeta\eta$, $\varepsilon\zeta$, $\delta\varepsilon$, et $\varepsilon\zeta$, $\delta\varepsilon$, $\gamma\delta$, $\beta\gamma$.

Le tableau IX donne les valeurs de s , f et $q = [2,549] \left(\frac{n^2}{n^2-4} \right)^2 \frac{f}{s}$ en fonction de n . Le tableau X donne les valeurs de l'intensité relative rapportée à $\lambda = 3000 \text{ \AA}$.

Tableau VIII.

 $\log l_\nu$ par gramme d'hydrogène dans l'état $n = 2$.

$\log N_1$	4801 $\log l_\nu = 8 +$	4221 $\log l_\nu = 8 +$	4036 $\log l_\nu = 8 +$	3930 $\log l_\nu = 8 +$	3862 $\log l_\nu = 8 +$
15,0	$\overline{5,613}$	$\overline{4,19}$	$\overline{4,69}$	$\overline{3,22}$	$\overline{3,86}$
15,2	$\overline{5,82}$	$\overline{4,41}$	$\overline{4,97}$	$\overline{3,44}$	$\overline{2,05}$
15,4	$\overline{4,03}$	$\overline{4,64}$	$\overline{3,17}$	$\overline{3,64}$	$\overline{2,29}$
15,6	$\overline{4,23}$	$\overline{4,84}$	$\overline{3,36}$	$\overline{3,87}$	$\overline{2,53}$
15,8	$\overline{4,43}$	$\overline{3,02}$	$\overline{3,56}$	$\overline{2,06}$	$\overline{2,78}$
16,0	$\overline{4,64}$	$\overline{3,22}$	$\overline{3,79}$	$\overline{2,33}$	$\overline{2,99}$
16,2	$\overline{4,89}$	$\overline{3,42}$	$\overline{2,00}$	$\overline{2,56}$	$\overline{1,17}$
16,4	$\overline{3,08}$	$\overline{3,66}$	$\overline{2,26}$	$\overline{2,84}$	$\overline{1,21}$
16,6	$\overline{3,26}$	$\overline{3,94}$	$\overline{2,52}$	$\overline{2,97}$	$\overline{1,23}$
16,8	$\overline{3,46}$	$\overline{2,18}$	$\overline{2,73}$	$\overline{1,03}$	$\overline{1,17}$
17,0	$\overline{3,67}$	$\overline{2,31}$	$\overline{2,91}$	$\overline{1,04}$	$\overline{1,11}$
17,2	$\overline{3,90}$	$\overline{2,57}$	$\overline{1,02}$	$\overline{1,00}$..
17,4	$\overline{2,10}$	$\overline{2,80}$	$\overline{1,05}$	$\overline{2,93}$..
17,6	$\overline{2,34}$	$\overline{2,97}$	$\overline{1,02}$
1,78	$\overline{2,60}$	$\overline{1,08}$	$\overline{2,97}$
18,0	$\overline{2,83}$	$\overline{1,08}$
18,2	$\overline{1,03}$	$\overline{1,04}$

Tableau IX.

n	s	$\log s$	$\log f$	$\log q$
4	0,06369	$\bar{2},804$	$\bar{1},076$	1,875
5	0,07980	$\bar{2},902$	$\bar{2},647$	1,348
6	0,1037	$\bar{1},0156$	$\bar{2},327$	0,979
7	0,1336	$\bar{1},1257$	$\bar{2},087$	0,810
8	0,1690	$\bar{1},2279$	$\bar{3},903$	0,509
9	0,2095	$\bar{1},3211$	$\bar{3},681$	0,274

Tableau X.

40 Eridani B			Van Maanen 2		
raies n $n+1$	λ	$\log \frac{F}{F_{3000}}$	raies n $n+1$	λ	$\log \frac{F}{F_{3000}}$
9	3862	0,081	8	3862	..
8	3930	0,103	7	3930	0,131
7	4036	0,147	6	4036	0,152
6	4221	..	5	4221	0,171
5	4601	..	4	4601	0,184
4					

18. **Comparaison avec l'observation.** Nous limitons les comparaisons au fond continu pour les raisons suivantes. Nous avons défini le fond continu au milieu de deux raies consécutives de la série de Balmer (§ 17b), le coefficient d'absorption étant lui-même défini par l'approximation de Pannekoek (Equation 17.1), suffisante ici. Mais comme nous l'avons brièvement indiqué à la fin du paragraphe 16, le calcul du contour des raies de l'hydrogène exigerait que l'on reprenne le travail de Verweij en le modifiant pour tenir compte de l'amortissement par chocs. Il faudrait en particulier évaluer l'intégrale de Rudkjøbing (second membre de 16.3) pour chacune des raies du réseau Stark des raies de l'hydrogène, calcul qui se trouve au-delà des limites que nous nous sommes fixées.

KUIPER (22) a donné le contour du fond continu pour 40 Eridani B et Van Maanen 2. Il ne s'agit que d'un microphoto-

gramme, et par conséquent on n'a que les densités photographiques. On trouve fig. 7, p. 75, les contours théoriques pour des étoiles de température et de gravité voisines. On voit que la ressemblance est frappante. Il ne fait aucun doute pour nous que la disparition des raies de Balmer dans les naines blanches

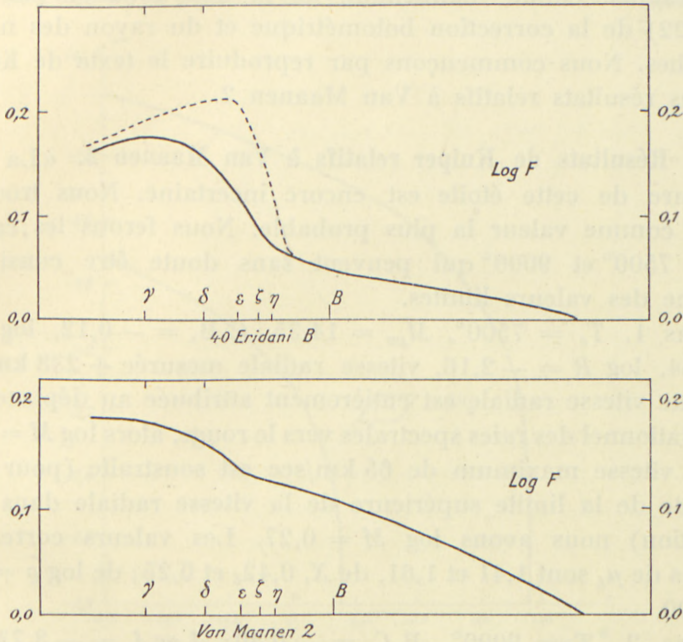


Fig. 7. Courbes représentatives du flux sortant pour 40 Eridani B et pour Van Maanen 2.

est effectivement due à l'élargissement des raies par effet Stark moléculaire.

On a tracé le fond continu pour 40 Eridani B dans les deux cas 1°) on néglige, et, 2°) on tient compte du recouvrement des raies par élargissement au-delà de leur largeur moyenne. On notera l'influence considérable du recouvrement même très loin des raies mélangées (par exemple entre H_β et H_γ). Il apparaît dès lors contestable que l'intensité mesurée par Kuiper entre H_β et H_γ pour 40 Eri B soit celle du fond continu. Il ne semble donc pas possible de relier de façon simple la grandeur de la discontinuité de Balmer au nombre d'atomes d'hydrogène présents dans l'état $n = 2$.

IV. Température effective et rayon des naines blanches.

1. L'étude de la répartition spectrale de l'énergie faite en troisième partie nous amène à une analyse détaillée, à la lumière des résultats connus maintenant, de la détermination par KUIPER (22) de la correction bolométrique et du rayon des naines blanches. Nous commençons par reproduire le texte de Kuiper sur les résultats relatifs à Van Maanen 2.

2. **Résultats de Kuiper relatifs à Van Maanen 2.** «La température de cette étoile est encore incertaine. Nous trouvons 8200° comme valeur la plus probable. Nous ferons les calculs pour 7500° et 9000° qui peuvent sans doute être considérés comme des valeurs limites.

Cas 1. $T_e = 7500^\circ$, $M_{pv} = 14,35$, C.B. = $-0,12$, $\log L = -3,84$, $\log R = -2,16$, vitesse radiale mesurée $+238$ km/sec. Si cette vitesse radiale est entièrement attribuée au déplacement gravitationnel des raies spectrales vers le rouge, alors $\log M = 0,41$. Si la vitesse maximum de 65 km/sec est soustraite (pour tenir compte de la limite supérieure de la vitesse radiale dans cette direction) nous avons $\log M = 0,27$. Les valeurs correspondantes de μ_e sont $1,41$ et $1,61$, de X , $0,42_5$ et $0,25$; de $\log \bar{\varrho} = 7,04$ et $6,90$.

Cas 2. $T_e = 9000^\circ$. B.C. = $-0,40$; $\log L = -3,73$, $\log R = -2,26$. Les deux hypothèses sur la vitesse radiale donnent $\log M = 0,31$, ou $0,17$; $\mu_e = 1,60$ ou $1,85$; $X = 0,26$ ou $0,09_5$, $\log \bar{\varrho} = 7,24$ ou $7,10$. On voit sur la figure 8, p. 77, l'emplacement des 4 solutions discutées. Dans la direction verticale, elles peuvent représenter les cas limites; la ligne de gauche correspondant à $V_{rad} = +65$ km est très probablement une ligne limite.

Mais la vitesse radiale véritable pourrait être négative et de 200 à 300 km/sec, doublant par conséquent le déplacement gravitationnel vers le rouge, entraînant ainsi une augmentation de $0,3$ du logarithme de M . Mais même dans ce cas extrême, il semble difficile d'amener l'étoile entre les deux lignes pointillées de la figure 1⁽¹⁾, comme il serait nécessaire si l'équation d'état $P = K \varrho^{\frac{5}{3}}$ était applicable. Il semble plus important de poser

(1) du texte de Kniper.

la question de la température effective qui définit la position en ordonnées. La coordonnée horizontale pourra à la longue être déterminée par la variation séculaire du mouvement propre qui permettra de connaître la vitesse radiale exacte.»

On remarquera que la principale question abordée dans ce texte est celle de la position de Van Maanen 2 dans le diagramme

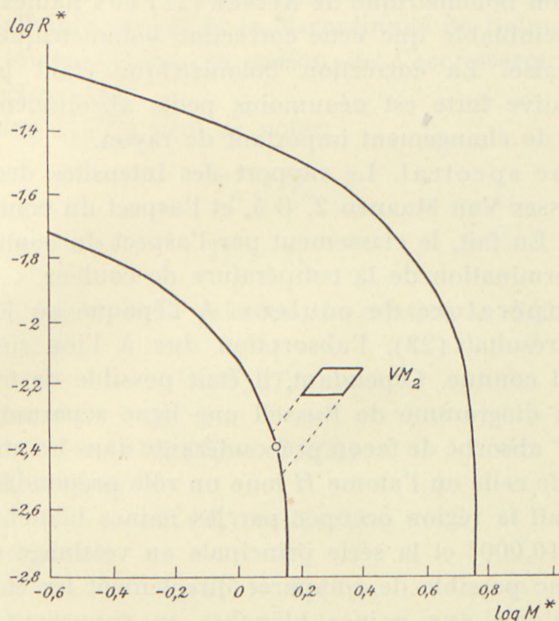


Fig. 8. Diagramme $\log M^* \log R^*$. La position de Van Maanen 2 telle qu'elle a été donnée par KUIPER est indiquée par le parallélogramme. Les lignes pointillées, courbes à vitesse radiale constante, indiquent les positions extrêmes de Van Maanen 2. Le cercle sur la courbe inférieure indique la position qui a été choisie pour Van Maanen 2 en conclusion de la discussion de la discussion du chapitre IV.

de la fig. 1 par rapport aux deux lignes pointillées. Cette question était particulièrement importante en 1939 au moment du «Colloque des Astrophysiciens» en raison de la controverse sur l'équation d'état de la matière dégénérée. En fait, nous verrons que les nouveaux résultats que nous indiquons sont nettement favorables à la théorie de Chandrasekhar.

Nous ne nous attarderons pas sur la question de la vitesse radiale de Van Maanen 2, qui ne prête pas à de longues discussions, mais nous examinerons de très près la question de la température effective de Van Maanen 2.

3. Température effective de Van Maanen 2 et correction bolométrique. Ces deux grandeurs sont déterminées par le type spectral. Faisons tout d'abord quelques remarques préliminaires :

a) La correction bolométrique C.B., dans ce domaine de températures n'est pas sujette à des erreurs considérables. Bien qu'il soit douteux qu'on puisse appliquer directement les tables de correction bolométrique de KUIPER (21) aux naines blanches, il est vraisemblable que cette correction bolométrique n'est pas très mauvaise. La correction bolométrique étant petite, une erreur relative forte est néanmoins petite absolument et n'entraîne pas de changement important de rayon.

b) Type spectral. Le rapport des intensités des raies du fer fait classer Van Maanen 2, G 5, et l'aspect du continu la fait classer a6. En fait, le classement par l'aspect du continu repose sur la détermination de la température de couleur.

c) Température de couleur. A l'époque où Kuiper publiait ses résultats (22), l'absorption due à l'ion négatif était encore mal connue. Cependant, il était possible de tracer dans le plan du diagramme de Russell une ligne séparant la région où l'ion H^- absorbe de façon prépondérante dans les atmosphères stellaires, de celle où l'atome H joue un rôle prépondérant. Cette ligne coupait la région occupée par les naines blanches au voisinage de 10.000° et la série principale au voisinage de 7.000° . Il était donc possible de comparer directement les étoiles de la série principale aux naines blanches en supposant pour $T_{\text{eff}} < 7.000^\circ$ l'absorption due uniquement à H^- et pour $T_{\text{eff}} > 10.000^\circ$ l'absorption due uniquement à H . Cette hypothèse d'un absorbant unique permettait d'espérer l'absence de tout phénomène dû à la magnitude absolue. De plus l'estimation de la discontinuité de Balmer devait corroborer ce premier résultat.

Deux circonstances permettent de douter du résultat. La première soulignée par Kuiper est que Van Maanen 2 se trouve justement dans la région A—F où la méthode de comparaison employée n'est pas applicable. La deuxième est que Kuiper n'a pas tenu compte de la déformation du spectre par le recouvrement des raies de l'hydrogène. Cette déformation se manifeste de deux façons, d'une part par une diminution de la discontinuité de Balmer, d'autre part, par une diminution de la température de couleur.

En effet, l'abaissement du fond continu par recouvrement des raies est d'autant plus marqué que l'on se rapproche de la discontinuité de Balmer, ce qui correspond à un abaissement de la température de couleur et à un affaiblissement de la discontinuité de Balmer. La discontinuité de Balmer et la température de couleur sont donc plus petites que celles que l'on observerait dans une étoile de la série principale de même température effective. L'affaiblissement de la discontinuité de Balmer se produirait de toutes façons, en raison de l'accroissement de la pression électronique.

La relation $T_e(T_c)$ peut se noter :

$$T_{c_1} > T_{c_2}$$

entraîne

$$T_{e_1} > T_{e_2}.$$

Sous l'influence de la pression, la relation se déforme. On avait la fonction

$$T_c(T_e),$$

on a maintenant

$$T'_c(T_e) < T_c(T_e).$$

Cherchons T'_e tel que

$$T'_c(T'_e) = T_c(T_e).$$

Comme on a alors

$$T'_c(T'_e) = T'_c(T_e),$$

on en déduit

$$T'_e > T_e.$$

La déformation du fond continu par recouvrement des raies fait qu'à une même température de couleur correspond une température effective plus élevée dans les naines blanches que dans les étoiles de la série principale, et cet effet est d'autant plus grand que la gravité (donc la pression) est plus forte.

Nous voyons donc que même sans mettre en doute la relation entre la correction bolométrique et la température effective, il est nécessaire de se méfier de la valeur de la correction bolométrique adoptée par Kuiper, car il est hors de doute que la température effective adoptée est trop faible. Nous donnons ici les valeurs de $\log R$ pour différentes valeurs de T_{eff} .

On a :

$$L = 4 \pi R^2 \sigma T_e^4$$

ou numériquement :

$$L^* = [18,536] R^{*2} T_e^4$$

Le tableau I donne la relation entre la température effective et les différentes grandeurs relatives à l'étoile.

Tableau I.

T_e	B. C.	M_{Bol}	$\log L^*$	$\log R^*$
7.500	— 0,10	14,25	— 3,84	— 2,15
8.000	— 0,20	14,14	— 3,80	— 2,19
8.500	— 0,32	14,03	— 3,75	— 2,22
9.000	— 0,42	13,93	— 3,71	— 2,25
9.500	— 0,52	13,83	— 3,67	— 2,27
10.000	— 0,62	13,73	— 3,63	— 2,30
10.500	— 0,72	13,63	— 3,59	— 2,32
11.000	— 0,82	13,53	— 3,55	— 2,34
12.000	— 1	13,35	— 3,48	— 2,38
13.000	— 1,2	13,15	— 3,40	— 2,41
15.000	— 1,52	12,83	— 3,27	— 2,47

On a noté ici L^* et R^* pour la luminosité et le rayon exprimé en unités de soleil afin de les distinguer de L et R en C. G. S.

Les valeurs limites de $\log R^*$, point de rencontre des droites $V = 65 \text{ km}$ et $V = 0$ avec la courbe limite $\log M^*$; $\log R^*$, sont :

$$\log R^* = -2,33 \text{ et } \log R^* = -2,45$$

correspondant respectivement aux températures effectives

$$T_e = 10.700^\circ \text{ et } T_e = 14.200.$$

Le modèle d'atmosphère que nous avons calculé pour Van Maanen 2 nous permet une estimation du rôle de l'élargissement des raies. On a approximativement :

$$\log_{10} \frac{F_{4000}}{F_{4600}} = 0,10 \pm 0,03$$

d'où, d'après les définitions données dans (9)

$$\Phi = 1,47 \pm 0,2$$

ou

$$\theta'_c = 0,49 \pm 0,07.$$

La température de couleur θ_c , définie de la même façon, correspondant à $\theta_0 = 0,50$, et $\theta_e = 0,42$ pour une étoile de la série principale, est approximativement (9)

$$\theta_c = 0,22.$$

On a donc

$$\theta_c = \theta'_c - 0,27 \mp 0,07.$$

Dans le cas de Van Maanen 2, classée avec

$$\theta'_c = 0,46,$$

on déduit

$$\theta_{e_{VM2}} = 0,19 \pm 0,07,$$

d'où

$$\theta'_{e_{VM2}} = 0,40 \pm 0,05,$$

ou

$$T'_{e_{VM2}} = 12 \cdot 500^\circ \pm 1000^\circ = T_{e_{VM2}} + 4300^\circ.$$

Sans attacher une trop grande valeur à l'exactitude de la correction apportée à la détermination de T'_e , on voit toutefois qu'elle est certainement considérable et a le signe indiqué. Il est donc parfaitement possible que Van Maanen 2 se trouve beaucoup plus près de la courbe $\mu_e = 2$ qu'il n'avait été supposé (34).

4. Le rayon des naines blanches et la théorie du débit d'énergie aux grandes densités. L'énormité du facteur d'accélération (44) nécessite une révision des résultats antérieurement donnés (34) concernant Van Maanen 2 et conduit à des conclusions analogues à celles du paragraphe précédent.

On trouvera dans le tableau II pour différentes densités et pour la température de $4,7 \cdot 10^6$ degrés les facteurs d'accélération correspondant à la réaction $^{12}C + ^1H$.

Tableau II.

$\log (\varrho/\mu_c)$	$\log A$
5,102	5,06
6,102	9,87
7,102	16,01
8,102	28,15

En supposant la hauteur de mélange donnée par la formule (34)

$$h = 1,5 \cdot 10^8 \frac{T}{g},$$

on obtient pour la luminosité

$$L = [25,815] A \eta^2 \frac{(\Phi^2 y_0^3 - 1)^3}{-\Phi' y_0^4}$$

en supposant la concentration en ^{12}C approximativement égale à 1 % au sein du mélange d'éléments lourds.

Différentes valeurs de la luminosité ont été calculées pour $1/y_0^2 = 0,01$ qui correspond approximativement au rayon de Van Maanen 2, et pour différentes valeurs de η , rayon réduit (7). Les calculs ont été faits également pour d'autres valeurs de T (tableau III).

Tableau III.

T	η	$\log A$	$\log L/L_{VM2}$
$4,7 \cdot 10^6$	4	13	7
$4,7 \cdot 10^6$	4,5	11,6	5,3
$3 \cdot 10^6$	4,5	16	5,3

Les valeurs de la densité sont donc encore assez élevées pour entraîner des facteurs d'accélération énormes. Il est donc nécessaire de supposer que Van Maanen 2 est entourée d'une très mince couche d'hydrogène, si l'on veut éviter de telles difficultés.

5. Influence du triage des éléments. Il pourrait sembler possible que le triage des éléments dans Van Maanen 2 réduise la concentration de ^{12}C et ^{14}N dans la couche de mélange dans

de telles proportions que le débit d'énergie s'en trouve fortement réduit. Une formule approximative, déjà utilisée par ailleurs (36) donne un facteur:

$$C_N \text{ moyen} / C_N \text{ dû au triage} = 500.$$

Bien que déjà élevé, ce facteur est néanmoins trop petit pour combler l'écart observé. La conclusion s'impose: Van Maanen 2, semblable en cela à la plupart des autres naines blanches connues, a une très petite teneur en hydrogène.

V. Théorie élémentaire du débit d'énergie des naines blanches.

1. Généralités. Nous avons longuement insisté dans la première partie sur la définition de la couche de mélange. Nous avons montré que sa hauteur variait légèrement suivant la dégénérescence du gaz d'électrons. En moyenne, on peut prendre (34):

$$(1.1) \quad h = 1,5 \cdot 10^8 \frac{T}{g}.$$

Elle varie, suivant les naines blanches, de quelques centièmes à quelques millièmes du rayon. Nous basons la théorie simplifiée que nous présentons ici sur l'hypothèse que la couche de mélange est infiniment mince et se réduit à une surface S de séparation entre l'hydrogène et les noyaux lourds.

Il n'est pas inutile de préciser que si nous négligeons l'épaisseur de la couche de mélange dans notre description de la structure des naines blanches, c'est à ce seul point de vue que nous la négligeons, car nous tenons compte exactement des sources d'énergie qui s'y trouvent accumulées (réactions du cycle de Bethe) comme on peut le voir plus loin.

La réaction proton-proton est supposée jouer un rôle essentiel et la vitesse de réaction est donnée par la formule calculée par BETHE et CRITCHFIELD (2). La production d'énergie dans la couche de mélange est donnée par:

$$(1.2) \quad L_B = [40,286] T^{\frac{1}{3}} \exp\left(-\frac{15250}{T^{\frac{1}{3}}}\right) \frac{r^2 \rho^2}{g} (c_N)_R$$

où ρ est la densité à l'intérieur de la surface S , $(c_N)_R$ la concentration en azote au sein du mélange d'éléments lourds, T la température en degrés, L_B le débit d'énergie en ergs.

Le coefficient d'absorption du gaz non dégénéré de protons et d'électrons est

$$(1.3) \quad \chi = [22,870] \rho T^{-3,5}$$

car, aux densités considérées, l'absorption par les électrons libres est négligeable (diffusion Thomson).

2. Les limites de la théorie élémentaire. Lorsque l'épaisseur de la couche de mélange n'est plus négligeable, la théorie n'est certainement plus applicable. La théorie qui est donnée ici n'est pas valable en toute généralité pour toutes les naines blanches. Elle ne peut sans doute être appliquée qu'aux naines blanches ne présentant pas de raies métalliques dans leur spectre, les autres ayant une structure légèrement différente.

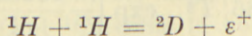
Certains résultats antérieurs (34) (39) deviennent entièrement différents.

Une partie des résultats présentés ici ont déjà été annoncés (40), (41), (42), (43), (45). Nous allons les exposer ici avec quelques détails.

3. La réaction proton-proton. Cette réaction avait été supposée interdite (39) dans le but d'expliquer l'épaisse couche d'hydrogène de Van Maanen 2. L'étude théorique du spectre et des réactions nucléaires conduisent au même résultat et permettent de conclure qu'il est impossible que Van Maanen 2 ait une couche d'hydrogène épaisse.

Ceci nous montre en particulier que Van Maanen 2 a un très petit rayon et se place donc très loin de la ligne correspondant dans la figure 8 à l'équation d'état $P = K \rho^{\frac{5}{3}}$. On confirme ainsi la théorie de la dégénérescence de Stoner et Anderson et les résultats de Chandrasekhar.

Il n'y a donc plus aucune raison de supposer la réaction



interdite (au sens des règles de sélection) et il est possible d'utiliser la formule de BETHE et CRITCHFIELD (2):

$$\varepsilon = 410 \varrho X^2 \tau^2 e^{-\tau},$$

avec

$$\tau = \frac{33,8}{T^{\frac{1}{3}}} \quad T \text{ en millions de degrés}$$

et tout calcul du débit d'énergie doit se faire en utilisant ces valeurs numériques.

4. Les bases de la théorie simplifiée. Nous devons rappeler certaines formules qui ont été déjà données (34).

On calcule le modèle pour la couche extérieure mince d'hydrogène en supposant la gravité et le rayon pratiquement constants dans toute cette couche. On obtient ainsi les relations suivantes entre la température et la densité d'une part et la profondeur géométrique comptée à partir de la surface d'autre part:

$$(4.1) \quad T = [6,434] \frac{M^* \Delta R}{R^* R},$$

$$(4.2) \quad \varrho = [0,116] R^{*-\frac{13}{4}} L^{*-\frac{1}{2}} M^{*\frac{15}{4}} \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^{\frac{13}{4}}.$$

Ces formules supposent la dégénérescence négligeable. La condition de la dégénérescence:

$$(4.3) \quad \frac{R \varrho T}{\mu} = K \varrho^{\frac{5}{3}} \mu_e^{-\frac{5}{3}}$$

conduit à une limite différente pour $\frac{\Delta R}{R}$ suivant que l'on admet que la dégénérescence apparaît dans l'hydrogène ($\mu_e = 1$, $\mu = \frac{1}{2}$) ou dans le noyau d'éléments lourds ($\mu_e = 2$). L'épaisseur non dégénérée maximum de l'hydrogène est donnée par

$$(4.4) \quad \frac{\Delta R}{R} < [1,351] R^* L^{*\frac{2}{7}} M^{*-\frac{9}{7}}.$$

Tous les calculs faits en supposant la couche d'hydrogène non dégénérée doivent conduire à une valeur de $\frac{\Delta R}{R}$ inférieure à cette quantité.

5. Les éléments de la théorie du débit d'énergie. La réaction proton-proton a lieu évidemment dans un domaine d'une certaine épaisseur. Comme nous supposons la couche de mélange infiniment mince, nous calculons la réaction (a) en supposant l'hydrogène pur, (b) en supposant que la température décroît si rapidement dans la couche d'hydrogène que la production d'énergie a lieu dans une couche infiniment mince.

La production d'énergie est donnée par :

$$(5.1) \quad L^* = \frac{R_{\odot}^3}{L_{\odot}} \int 4\pi R^{*2} \rho \varepsilon dr^*$$

$$(5.2) \quad L^* = 4\pi R^{*2} 410 \frac{R_{\odot}^3}{L_{\odot}} \int \rho^2 \tau^2 e^{-\tau} dr^*.$$

Nous introduisons les expressions (4,1) et (4,2) pour la température et la densité, ce qui correspond à l'hypothèse (b). De plus nous avons :

$$(5.3) \quad \tau = \frac{B}{[2,145]} \left(\frac{M^*}{R^*}\right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$(5.4) \quad \tau_0 = \frac{B}{[2,145]} \left(\frac{M^*}{R^*}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$(5.5) \quad \frac{\Delta R}{R} = \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^3.$$

On obtient ainsi

$$(5.6) \quad L^* = 4\pi R^{*3} 410 \frac{R_{\odot}^3}{L_{\odot}} \rho_0^2 3 \tau_0^{\frac{45}{2}} \int_r^{\infty} \tau^{-\frac{43}{2}} e^{-\tau} d\tau$$

où l'on a

$$(5.7) \quad \varrho = \varrho_0 \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^{\frac{1.8}{4}}.$$

On remplace l'intégrale par le premier terme de son développement asymptotique:

$$(5.8) \quad L^* = 12 \pi R^{*3} \cdot 410 \frac{R_{\odot}^3}{L_{\odot}} \varrho_0^2 \tau_0^{\frac{4.5}{2}} \frac{e^{-\tau}}{41 \frac{4.1}{\tau^2}}.$$

On obtient ainsi l'expression numérique ⁽¹⁾:

$$(5.9) \quad L^{*2} = [4,824] R^{* \frac{-1.7}{6}} M^{* \frac{4.1}{6}} \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^{\frac{4.1}{6}} e^{-[1,384] \left(\frac{E^*}{M^*} \right)^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^{-\frac{1}{3}}$$

ou

$$(5.10) \quad L^* = [2,412] R^{* \frac{-1.7}{1.2}} M^{* \frac{4.1}{1.2}} \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^{\frac{4.1}{1.2}} e^{-[1,083] \left(\frac{R^*}{M^*} \right)^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^{-\frac{1}{3}}.$$

On peut poser:

$$(5.11) \quad L^* = \lambda \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^{\frac{4.1}{1.2}} e^{-\mu \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^{-\frac{1}{3}}};$$

les coefficients λ et μ sont donnés dans la table I.

Table I.

$1/y_0^2$	$\log \lambda$	μ
0
0,01	6,47	1,56
0,02	6,25	1,73
0,05	5,89	2,00
0,1	5,57	2,27
0,2	5,11	2,65
0,3	4,74	2,96
0,4	4,38	3,29
0,5	4,02	3,65
0,6	3,62	4,07
0,8	2,58	5,44

(1) On peut faire un calcul analogue en supposant que la réaction se produit dans une région à température constante. On trouve une expression de même forme, avec un facteur numérique très légèrement différent.

Si la concentration en hydrogène est:

$$(5.12) \quad X = \frac{\text{masse de la couche extérieure d'hydrogène}}{\text{masse de l'étoile}},$$

on a:

$$(5.13) \quad X = [\bar{1},812] R^{* - \frac{1}{4}} L^{* - \frac{1}{2}} M^{* \frac{11}{4}} \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^{\frac{17}{4}}$$

qui devient à l'aide de (10,10)

$$(5.14) \quad X = [\bar{2},609] R^{* \frac{11}{24}} M^{* \frac{25}{24}} \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^{\frac{61}{24}} e^{\frac{\mu}{2} \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^{-\frac{1}{3}}}.$$

6. Eléments de la théorie. Dégénérescences. Lorsque la dégénérescence apparaît dans la couche d'hydrogène, le calcul doit être modifié.

Dans ce cas, on suppose la température centrale égale à:

$$(6.1) \quad T = [7,79] \left(\frac{L^*}{M^*} \right)^{\frac{2}{7}}$$

et constante dans toute la région dégénérée. Le débit d'énergie est alors dans la région dégénérée:

$$(6.2) \quad L^* = 4 \pi R^{*2} \frac{R_{\odot}^2}{L_{\odot}} 410 \tau^2 e^{-\tau} \frac{5}{3} \frac{K}{g} \int_D^{\circ} \rho^{\frac{5}{3}} d\rho$$

où g est la gravité, $K = [12,996]$ et

$$(6.3) \quad \tau = [0,927] \left(\frac{M^*}{L^*} \right)^{\frac{2}{21}}.$$

La teneur en hydrogène est:

$$(6.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} MX = \int 4 \pi r^2 \rho dr \\ = 4 \pi R^2 \int \rho dr, \end{array} \right.$$

or

$$(6.5) \quad \rho dr = -\frac{dP}{g},$$

d'où

$$(6.6) \quad MX = 4\pi R^2 \frac{P}{g}.$$

La pression est $P = K \rho^{\frac{8}{3}}$. On en déduit:

$$(6.7) \quad X = [0,043] \frac{R^{*4}}{M^{*2}} \rho^{\frac{8}{3}},$$

formule valable dans la région de dégénérescence.

La production d'énergie est égale à la somme de l'énergie produite dans la région dégénérée et de l'énergie produite dans la région non dégénérée. On obtient ainsi:

$$(6.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} L^* = [5,157] L^{*\frac{4}{21}} R^{*\frac{-12}{5}} M^{*\frac{251}{105}} e^{-\tau} (X^{\frac{8}{3}} - X_0^{\frac{8}{3}}) \\ \quad + [14,064] \frac{R^{*4}}{M^{*\frac{41}{21}}} L^{*\frac{20}{21}} e^{-\tau}. \end{array} \right.$$

Avec la définition que nous avons prise pour l'apparition de la dégénérescence, on a :

$$(6.9) \quad L_{ND} = \frac{4\pi K 102}{G 164} 410 \frac{R^4}{M} \tau^2 e^{-\tau} \rho^{\frac{8}{3}}$$

$$(6.10) \quad L_0 = \frac{4\pi K 5}{G 8} 410 \frac{R^4}{M} \tau^2 e^{-\tau} \rho^{\frac{8}{3}}$$

où L_0 est l'énergie qui serait produite par la masse d'hydrogène non dégénérée MX_0 si toute cette masse était dégénérée. On a pratiquement $L_{ND} = L_0$, d'où :

$$(6.11) \quad L^* = [5,157] L^{*\frac{4}{21}} R^{*\frac{-12}{5}} M^{*\frac{251}{105}} e^{-\tau} X^{\frac{8}{3}}.$$

Cette expression est valable quelle que soit la masse d'hydrogène dégénérée.

On trouvera dans le tableau II les coefficients en fonction de $1/y_0^2$.

Tableau II.

$1/y_0^2$	$[0,927] M^{* \frac{9}{21}}$	$5,157 + \log R^{* \frac{-12}{5}} M^{* \frac{251}{105}}$
0		
0,01	8,70	11,552
0,02	8,68	11,266
0,05	8,61	10,770
0,1	8,50	10,391
0,2	8,35	9,900
0,3	8,20	9,554
0,4	8,07	9,223
0,5	7,92	8,907
0,6	7,76	8,572
0,8	7,31	7,657
1		

Ce calcul cesse d'être valable quand la région d'hydrogène dégénéré occupe une épaisseur nulle. Le cas se présente lorsque

$$(6.12) \quad \frac{\Delta R}{R} = [1,354] R^{*} L^{* \frac{2}{7}} M^{* -\frac{9}{7}}.$$

On a alors

$$(6.13) \quad L^{* \frac{1}{42}} = [7,032] R^{*2} M^{* -\frac{41}{42}} e^{-[0,630] \left(\frac{M^{*}}{L^{*}}\right)^{\frac{2}{21}}}.$$

A cette relation correspond une courbe limite dans le plan L^{*}, M^{*} (fig. 9). D'un côté, les naines blanches ont leur couche d'hydrogène entièrement non-dégénérée, de l'autre, elle est partiellement dégénérée.

Tableau III.

$\log M^{*}$	$\log L^{*}$
0,140	+ 0,25
0,125	— 0,50
0,085	— 1,30
0,035	— 1,80
— 0,053	— 2,38
— 0,131	— 2,75
— 0,213	— 3,10
— 0,297	— 3,50
— 0,391	— 3,80
— 0,657	— 4,60

Le tableau III donne les points de la courbe $L^*(M^*)$ limite. Ces valeurs ont été déterminées en résolvant (6.13) à l'aide d'une abaque à points alignés, et ne sont pas données avec une grande précision.

7. Analyse de 40 Eridani B. Nous prenons pour 40 Eridani B les valeurs suivantes:

$$\log L^* = -2,1 \quad \log R^* = -1,8 \quad \log M^* = -0,35.$$

La formule (5.10) donne:

$$(7.1) \quad \frac{\Delta R}{R} = 0,15.$$

La condition (4.4) donne

$$(7.2) \quad \frac{\Delta R}{R} \leq 0,25.$$

La condition (4.4) est satisfaite. 40 Eri B s'explique donc entièrement par la réaction proton-proton. La formule (4.1) donne la température qui règne dans la couche de mélange:

$$(7.3) \quad T = 11,46 \cdot 10^6 \text{ degrés.}$$

La hauteur de mélange rapportée au rayon est:

$$(7.4) \quad \frac{h}{R} = 0,022.$$

Elle est très petite comparée à l'épaisseur de la couche d'hydrogène.

Calculons à titre de comparaison la production d'énergie par les réactions du cycle de Bethe. La formule (1.2) nous donne le débit d'énergie dans la couche mixte.

La densité est [(34), 199]:

$$(7.5) \quad \rho = [1,377] R^{*-2,55} M^{*2,85} L^{*0,3} \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^{2,55}$$

d'où:

$$(7.6) \quad \log \varrho = 3,490.$$

En prenant $(c_N)_R = 10^{-2}$, on obtient

$$(7.7) \quad \log L_B = 29,4,$$

soit environ

$$(7.8) \quad L_B = 10^{-2} L_H$$

Le débit d'énergie par les réactions du cycle du carbone est négligeable. La luminosité de 40 Eridani B est entièrement due aux réactions proton-proton et suivantes.

Ce résultat, en parfait accord avec tout ce que la physique nucléaire nous apprend sur la réaction proton-proton, est à la fois une preuve de l'exactitude de la théorie de la réaction proton-proton et une explication sans défaut, au moins en principe, de l'origine du débit d'énergie des naines blanches.

8. Influence des réactions du cycle du carbone. Pour les naines blanches les plus chaudes les réactions du cycle du carbone peuvent devenir importantes.

Le débit d'énergie dû aux réactions du cycle du carbone est:

$$(8.1) \quad L_c^* = [14,778] T^{\frac{1}{3}} \exp\left(\frac{15250}{T^{\frac{1}{3}}}\right) \frac{R^{*4}}{GM^*} \varrho_{\text{core}}^2,$$

avec

$$(8.2) \quad \varrho_c = 2 \varrho_H.$$

où ϱ_H est donné par (4,2)⁽¹⁾. On en déduit:

$$(8.3) \quad L_c^* = [22,788] \frac{R^{*4}}{M^*} R^{*-\frac{13}{2}} M^{*\frac{15}{2}} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{\frac{13}{2}} T^{\frac{1}{3}} \exp\left(-\frac{15250}{T^{\frac{1}{3}}}\right) L^{*-1};$$

comme

$$(8.4) \quad L^* = L_c^* + L_H^*,$$

(1) En fait, il faudrait prendre suivant les cas (4,2) ou (7,5). Le calcul montre que le résultat est insensible à la formule employée.

on a

$$(8.5) \left\{ \begin{aligned} L^{*2} &= [24,933] \frac{R^{*4}}{M^*} R^{*-\frac{13}{2}} M^{*\frac{15}{2}} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{\frac{13}{2}} \left(\frac{M^*}{R^*}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{\frac{1}{3}} \exp\left(\frac{15250}{T^{\frac{1}{3}}}\right) \\ &+ [4,824] R^{*-\frac{17}{6}} M^{*\frac{41}{6}} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{\frac{41}{6}} \exp\left(-\frac{3380}{T^{\frac{1}{3}}}\right). \end{aligned} \right.$$

L'égalité $L_c = L_H$ se produit pour

$$(8.6) \quad T = 16,9 \cdot 10^6 \text{ degrés.}$$

Ceci correspond à

$$(8.7) \quad \frac{\Delta R}{R} = \frac{R^*}{M^*} [0,795].$$

On en déduit $L^*(M^*)$ le long de la courbe

$$(8.8) \quad L^* = [2,69] R^{*2}.$$

On calcule de même les courbes le long desquelles $\frac{L_B}{L_H} = \xi$.

Elles sont de la forme $L^* = Cte R^{*2}$ et le coefficient Cte est donné dans le tableau IV.

Tableau IV.

ξ	$\log Cte$
10^{-2}	1,54
10^{-1}	1,93
1	2,42
10	3,15
100	4,04

Il faut arrêter cette courbe à la courbe limite déjà calculée, lieu d'apparition de la dégénérescence dans l'hydrogène. On trouve ainsi que pour Sirius B, $L_C = L_H$. On a alors

$$(8.9) \quad T = 16,8 \cdot 10^6 \text{ degrés}$$

$$(8.10) \quad \frac{\Delta R}{R} = 0,05.$$

La condition (9.4) donne

$$(8.11) \quad \frac{\Delta R}{R} < 0,064.$$

Cette condition est donc satisfaite par la valeur (8.10). On a de plus $h = 0,00667$.

Dans le cas où les réactions proton-proton se produisent dans une région d'hydrogène où le gaz d'électrons est dégénéré, un calcul analogue donne une autre courbe limite. L'égalité entre les deux termes L_H et L_c donne

$$(8.12) \quad \begin{cases} \frac{L^*}{2} = [5,157] R^{-\frac{1,2}{5}} M^{\frac{2,51}{1,05}} X^{\frac{8}{5}} L^{*\frac{-4}{21}} \exp - [0,927] \left(\frac{M^*}{L^*}\right)^{\frac{9}{21}} \\ = [24,500] R^{-\frac{4}{5}} M^{\frac{7}{5}} X^{\frac{6}{5}} \left(\frac{L}{M}\right)^{\frac{9}{21}} \exp - [1,586] \left(\frac{M^*}{L^*}\right)^{\frac{9}{21}}. \end{cases}$$

On en tire X

$$X^{\frac{2}{5}} = [19,343] R^{*\frac{8}{5}} M^{*\frac{-11,4}{1,05}} L^{*\frac{6}{21}} \exp - [1,478] \left(\frac{M^*}{L^*}\right)^{\frac{9}{21}}$$

et finalement la relation:

$$\frac{1}{21} \log L^* + 55,8 \left(\frac{M^*}{L^*}\right)^{\frac{9}{21}} = 82,530 + 4 \log R^* - \frac{205}{105} \log M^*,$$

ou

$$(8.14) \quad \left(\frac{M^*}{L^*}\right)^{\frac{9}{21}} = 1,480 + 0,0718 \log R^* - 0,0380 \log M^* - 0,00085 \log L^*.$$

Cette relation a été calculée numériquement pour quelques valeurs de M^* . Les points obtenus se trouvent au-dessus de la courbe d'apparition de la dégénérescence dans l'hydrogène.

On trouve ainsi pour AC 70°8247, avec

$$\log L^* = -1,67 \quad \log M^* = 0,12 \quad \log R^* = -2,41,$$

que

$$L_c^* \cong \frac{1}{2} L_H^* \cong \frac{1}{3} L^*,$$

ce qui correspond à la position de AC 70°8247 au voisinage de la courbe qui vient d'être calculée.

9. Les courbes à teneur en hydrogène $X = \text{Constante}$. On a calculé pour les différentes masses, à l'aide de la représentation paramétrique $\frac{\Delta R}{R}$, L^* et X . Par interpolations graphiques, on a obtenu les courbes de la figure 9, p. 95. On a également calculé le lieu des points où $L_B/L_H = 0,01; 0,1; 1; 10$, et on a marqué sur ces courbes les points $\log X = 4,6$ à $\bar{5},4$ en $0,2$. On a procédé de même dans la région dégénérée (tableaux V, VI et VII).

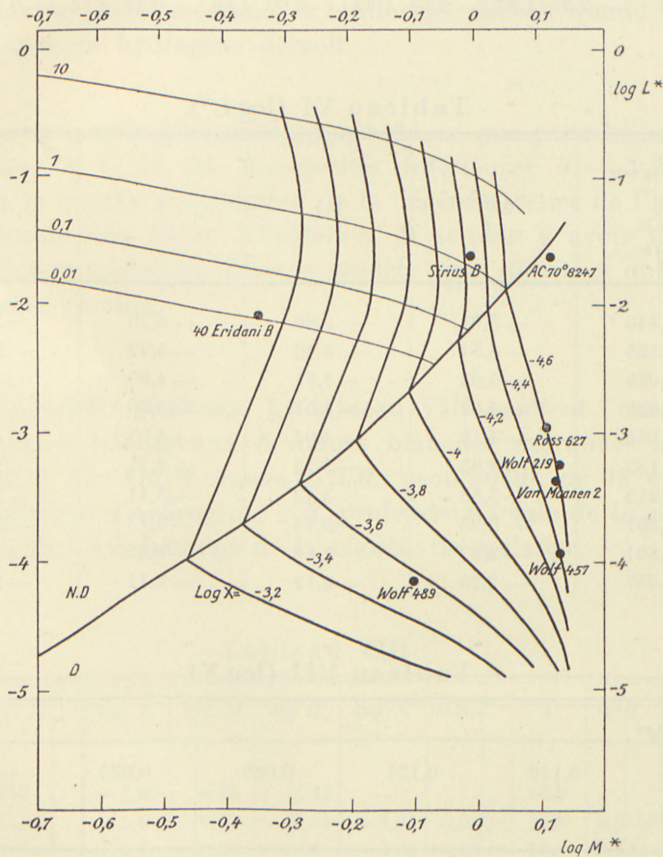


Fig. 9. Diagramme Masse-Débit d'énergie ($\log M^*$, $\log L^*$). On a tracé les courbes $X = \text{cte}$ et la courbe d'apparition de la dégénérescence dans l'hydrogène. On a tracé également les courbes indiquant la contribution des réactions du cycle du carbone par rapport à la réaction proton-proton dans les naines blanches les plus brillantes. On a marqué la position des principales naines blanches connues. On remarquera ainsi la faible contribution des réactions du cycle du carbone dans 40 Eridani B (0,01) et leur légère prépondérance dans Sirius B.

Tableau V.
Région non dégénérée, $\log X$ et $\log L^*$.

$\log M^*$	— 0,391	— 0,297	— 0,213	— 0,131	— 0,053
$\log \frac{AR}{R}$	$\log L^* \log X$	$\log L^* \log X$	$\log L^* \log X$	$\log L^* \log X$	$\log L^* \log X$
— 1,5	— 7,09 $\bar{4},34$	— 6,12 $\bar{4},15$	— 5,25 $\bar{5},96$	— 4,64 $\bar{5},79$	— 3,65 $\bar{5},63$
— 1	— 3,61 $\bar{4},73$	— 2,82 $\bar{4},62$	— 2,12 $\bar{4},51$	— 1,45 $\bar{4},42$	— 0,79 $\bar{4},32$
— 0,9	— 2,99 $\bar{4},85$	— 2,23 $\bar{4},75$	— 1,55 $\bar{4},65$	— 0,91 $\bar{4},57$	— 0,26 $\bar{4},48$
— 0,8	— 2,37 $\bar{4},97$	— 2,58 $\bar{4},89$	— 0,99 $\bar{4},80$	— 0,37 $\bar{4},76$	+ 0,26 $\bar{4},65$

Tableau VI ($\log L^*$).

L_B/L_H				
	0,01	0,1	1	10
$\log M^*$				
0,140	— 5,91	— 5,80	— 5,79	— 5,88
0,125	— 5,54	— 5,43	— 5,42	— 5,51
0,085	— 5,02	— 4,91	— 4,90	— 4,99
0,035	— 4,62	— 4,51	— 4,50	— 4,59
— 0,053	— 4,15	— 4,04	— 4,03	— 4,12
— 0,133	— 3,83	— 3,72	— 3,71	— 3,80
— 0,213	— 3,53	— 3,42	— 3,41	— 3,50
— 0,297	— 0,25	— 3,14	— 3,13	— 3,22
— 0,391	— 2,97	— 2,80	— 2,85	— 2,94
— 0,657	— 2,23	— 2,12	— 2,11	— 2,20

Tableau VII ($\log X$).

$\log M^*$					
	0,140	0,125	0,085	0,035	— 0,053
$\log L^*$					
— 1	— 5,02	— 4,83	— 4,56	— 4,37	— 4,08
— 2	— 5,04	— 4,85	— 4,59	— 4,40	— 4,15
— 3	— 4,90	— 4,71	— 4,46	— 4,28	— 4,05
— 5	— 4,52	— 4,33	— 4,09	— 3,94	— 3,72
— 5	— 3,88	— 3,69	— 3,46	— 3,32	— 3,13

Dans la partie supérieure du diagramme (p. 95), les courbes se raccordent à celles qui avaient déjà été calculées (34). Mais dans sa partie inférieure le diagramme est très différent.

On remarquera

que dans la partie supérieure, la luminosité croît quand la teneur en hydrogène décroît,

que dans la partie inférieure, la luminosité croît quand la teneur en hydrogène décroît,

que dans la partie médiane, la luminosité décroît quand la teneur en hydrogène décroît.

On sera particulièrement frappé de ce que pour les masses inférieures à \odot et les luminosités inférieures à $-1,7 L_{\odot}$ environ, la courbe d'apparition de la dégénérescence de l'hydrogène semble une limite d'évolution. Il semble y avoir là une contradiction essentielle dans le modèle ainsi décrit, et qui n'est pas encore résolue.

10. Résultats généraux. Le tableau VIII contient l'ensemble des résultats relatifs aux 8 naines blanches marquées sur la figure 9, p. 95. On y trouve $\Delta R/R$, profondeur de la couche non dégénérée d'hydrogène, z/R , profondeur totale de la couche d'hydrogène, h/R hauteur de la couche de mélange.

Tableau VIII.

Etoile	$\log L$	$\log M$	$\log R$	$\log X$	$\Delta R/R$	T	h/R	z/R
A C 70°8247 . . .	-1,67	0,12	-2,41	18,9
Sirius B	-1,6	-0,01	-2,11	-4,3	0,050	16,8	0,0067	..
O ₂ Eri B	-2,1	-0,35	-1,8	-3,05	0,15	11,5	0,022	..
Ross 627	-3,00	0,11	-2,34	-4,6
Wolf 219	-3,28	0,13	-2,48	-4,7
V. M. 2	-3,4	0,125	-2,41	-4,57	0,0072	6,02	0,0014	0,031
Wolf 457	-3,96	0,13	-2,47	-4,4
Wolf 489	-4,16	-0,11	-1,98	-3,55

Conclusions.

11. Il semble bien que la théorie du débit d'énergie des naines blanches puisse se faire sans contradiction avec la physique nucléaire. Cependant, d'autres difficultés surgissent inévitablement.

a) Nous avons déjà signalé une difficulté relativement à l'évolution des naines blanches.

b) La couche d'hydrogène expliquant le débit d'énergie de Van Maanen 2, bien que mince, est cependant 20 fois plus épaisse que la couche de mélange. Il semble indispensable, si on veut expliquer la présence des raies métalliques dans l'atmosphère de Van Maanen 2 de modifier notre conception de la structure des naines blanches. En fait, il ne s'agit pas exactement d'une structure différente, mais d'une structure plus complexe, avec des couches convectives multiples dans les régions extérieures de Van Maanen 2. C'est ce que nous nous proposons d'étudier prochainement.

Appendice.

Valeurs de $d \log T / d \log P$ en fonction de la densité et de la température (Voir p. 47 et suivantes).

$\log N_e$

θ	15	16	17	18	19	20	21	22	23
0.01	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400	0.4
0.02	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.399	0.398	0.4
0.05	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.397	0.389	0.388	0.4
0.1	0.4	0.4	0.4	0.399	0.394	0.366	0.325	0.339	0.4
0.2	0.4	0.4	0.392	0.317	0.225	0.169	0.123	0.167	0.4

*Institut d'Astrophysique de Paris et Observatoire
de l'Université de Copenhague.*

Bibliographie.

1. BETHE, Handbuch der Physik, **24**, 2.
2. BETHE and CRIETCHFIELD, Phys. Rev., **54**, 248, 1938.
3. BIERMANN, A. N., **263**, 185, 1937.
4. — **264**, 361, 1937.
5. BLACKETT, Nature, **159**, 658, 1947.
6. CHANDRASEKHAR, M. N., **91**, 446, 1931.
7. — Stellar Structures.
8. — Ap. J., **101**, 328, 1945.
9. CHANDRASEKHAR and MÜNCH, A. J., **104**, 446, 1946.
10. CHAPMAN, M. N., **77**, 539, 1917.
11. CHAPMAN and COWLING, Mathematical Theory and non-uniform Gases, Chapitre 7.
12. — — M. T., Chapitre 14.
13. CRITCHFIELD, Ap. J., **96**, 1, 1942.
14. EDDINGTON, Internal Constitution of the Stars.
15. FERMI, Zts. f. Phys., **36**, 383, 1926.
16. FOWLER, Phil. Mag. **1**, 863, 1926.
17. GIBBS, Collected Papers, Thermodynamics, pp. 144, 171.
18. HOLTSMARK, Ann. d. Phys., **58**, 577, 1919.
19. INGLIS and TELLER, Ap. J., **90**, 439, 1939.
20. KOURGANOFF, Communication faite aimablement à l'auteur.
21. KUIPER, Ap. J., **88**, 429, 1938.
22. — White Dwarfs, Actualités scientifiques et Industrielles, 903, Hermann, Paris.
23. LANCZOS, Zts. f. Phys., **68**, 204, 1931.
24. MILNE, Proc. Camb. Phil. Soc., XXII, 493, 1924.
25. — M. N., **90**, 769, 1930.
26. MROWKA, Ann. d. Phys., **16**, 756, 1932.
27. PANNEKOEK, B. A. I. N., **19**, 1932.
28. — M. N., **98**, 694, 1938.
29. ROSSELAND, M. N., **84**, 729, 1924.
30. RUDKJØBING, Zts. f. Astr., **21**, 254, 1942.
21. — Festschrift til N. E. Nørlund, **1**, 161, Kbh. 1945.
32. — Annales d'Astrophysique, **9**, 17, 1946.
33. RUSSELL and STEWART, Ap. J., **59**, 197, 1924.

34. SCHATZMAN, *Annales d'Astrophysique*, **8**, 143, 1945.
35. — C. R., **222**, 479, 1946¹.
36. — *Ann. d'Astr.*, **9**, 199, 1946.
37. — C. R., **224**, 31, 1947.
38. — C. R., **225**, 1060, 1474.
39. — *Ann. d. Astr.*, **10**, 93, 1947.
40. — C. R., **225**, 867, 1947.
41. — *Nature*, **161**, 61, 1948.
42. — C. R., **226**, 67, 1948.
43. — *Ap. J.*, **107**, 110, 1948².
44. — *Journal de Physique et le Radium IX*, 46, 1948.
45. — *Ann. d'Astr.* **10**, 341, 1947.
46. STONER, *Phil. Trans. Roy. Sos. A.*, **237**, 67, 1938.
47. STRÖMGREN, *Zs. f. Astr.*, **4**, 118, 1932.
48. — *Publ. Kbhv. Observatorium. Nr. 138.*
49. UNSÖLD, *Zts. f. Astr.*, **1**, 138, 1931; **2**, 209, 1931.
50. — *Phys. d. Sternatmosphären.*
51. VERWEJ, *Proc. K. Akad. Wetens. Amsterdam*, **38**, 1935, No. 5.

¹ Cette note comporte à la fin des conclusions inexactes.

² Cette note comporte une petite erreur numérique qui ne change aucune des conclusions. Dans l'équation 7 p. 111, au lieu du coefficient $10^{2.91}$, lire $10^{2.41}$.